
SHOUT
SHARE
IT

# MEMORIE

## *DI MATEMATICA*

## *E DI FISICA*

DELLA

# SOCIETÀ ITALIANA

## DELLE SCIENZE

*RESIDENTE IN MODENA*

## *TOMO XIX.*

PARTE CONTENENTE LE MEMORIE DI MATEMATICA.

MODENA

PRESSO LA SOCIETÀ TIPOGRAFICA

MDCCCXXI.



# MEMORIE

DELLA SOCIETÀ ITALIANA DELLE SCIENZE

RESIDENTE IN MODENA

*TOMO XIX.*

## FASCICOLO PRIMO

DELLE

MEMORIE DI MATEMATICA

# INDICE

## DELLE COSE CONTENUTE NEI FASCICOLI I.° e II.°

## DELLE MEMORIE DI MATEMATICA

## *DEL TOMO XIX.*


Notizie risguardanti la vita e studj del Dott. GIOVACCHINO CARRADORI scritte dal Sig. GIUSEPPE RADDI Pag. I.

Elogio Storico di PIETRO RUBINI scritto dal Signor Prof. ANGELO PEZZANA IX.

Vita ed Elogio di ANTONIO MANZONI scritti dal Sig. Dott. GIOVAMBATTISTA ZOPPI LI.

Elogio del Professor PAOLO RUFFINI Presidente della Società Italiana delle Scienze scritto dal Sig. Prof. GIUSEPPE BIANCHI. LXXXV.

Elogio di PIETRO COSSALI scritto dal Sig. Ab. Professore GIUSEPPE AVANZINI. CXI.

Sull' equilibrio delle curve a doppia curvatura rigide ec. Memoria del Sig. Prof. ANTONIO BORDONI. 1.

Risoluzione dell' Equazione generale completa di secondo grado a tre indeterminate, Memoria del Sig. Ingegnere GEMINIANO POLETTI. 30.

Analisi Geometrica dell' Ariete Idraulico, Memoria del Sig. Prof. GIUSEPPE VENTUROLI. 62.

Dimostrazione di alcune formole generali della Lettera Domenicale per qualunque anno innanzi, e dopo la riforma del Calendario Gregoriano, Memoria del Sig. GIUSEPPE CALANDRELLI *Astron.* 97.

Memoria sopra un Cannocchiale iconantidiptico del Sig. Prof. GIO. BATTISTA AMICI. 113.

Memoria sulla costruzione di un Cannocchiale Acromatico senza lenti eseguito con un sol mezzo refringente, DELLO STESSO. 121.

Sopra il movimento di un punto materiale attratto da due centri fissi, l'uno di questi essendo supposto infinitamente lontano, Memoria del Sig. GIOVANNI PLANA *Astronomo*. 138.

Sull' equilibrio astratto delle Volte, Memoria del Sig. Prof. ANTONIO BORDONI. 155.

Saggio dell' aurea sintesi Greco-Italica presa in esempio da uno dei Mss. Geometrici inediti del Matematico *Vincenzo Viviani*, Memoria del Sig. Matematico PIETRO FERRONI. 187.

Sopra la integrazione della formola $\frac{dx}{(1+2qx\cos.\varphi+q^2x^2)^{n-1}}$, Memoria del Sig. Prof. GIULIANO FRULLANI. 223.

Sulle funzioni generatrici Memoria I. del Sig. MARCHESE LUIGI RANGONI. 241.

. . . . . Memoria II. 659.

Osservazioni intorno all' Ecclise solare del giorno 7. Settembre dell' anno 1820. del Sig. Professor GIOVANNI SANTINI. 308.

Nuovo metodo per misurare la velocità delle acque che scorrono pe' fiumi del Sig. INGEGNER GEMINIANO POLETTI. 330.

Brevissimo cenno Geometrico sopra alcune linee curve dipendenti dalle sezioni coniche del Sig. Matematico PIETRO FERRONI. 377.

Sopra un Problema dei Signori Daniele Bernoulli e De la Grange, Memoria, del Sig. CONTE PIETRO ABBATI MARESCOTTI 385.

Illustrazione di un antico Documento relativo all' originario rapporto tra le acque dell' Arno e quelle della Chiana, Memoria del Sig. CONTE VITTORIO FOSSOMBRONI. 481.

Sulla stereometria, Memoria del Prof. Sig. ANTONIO MARIA BORDONI. 527.
Riflessioni sul moto permanente dell'acqua ne'Canali orizzontali, Memoria del Sig. Prof. GIORGIO BIDONE. 567.
Sul moto dell'acqua nei Canali, Memoria del Sig. OTTAVIANO FABRIZIO MOSSOTTI. 616.

BRITISH
NATURAL HISTORY



*Dottor Gioacchino Carradori*

*Gius. Guardi dip.* *Gius. Isola inc.*

# NOTIZIE

## RISGUARDANTI LA VITA E STUDI DEL DOTTORE GIOVACCHINO CARRADORI

SCRITTE DAL SIG. PROFESSOR GIUSEPPE RADDI

*Ricevute li* 3. *Giugno* 1820.

Nacque Giovacchino Carradori ai 7 di Giugno dell' Anno 1758 da poveri ma onesti Genitori. Studiò le umane lettere nel Seminario di Prato, ed apprese nel Collegio Cicognini della stessa Città le prime nozioni della Filosofia. Ottenne quindi il posto nel R. Collegio Ferdinando di Pisa, ove si applicò con ardore allo studio della medicina, di quell' Arte salutare, a cui il suo gran genio era non solamente portato per le cognizioni che in essa si richiedono, ma lo era ancor più, e senza comparazione per l' utilità di cui essa può essere all' Umanità, ciò che dovrebbe esser sempre lo scopo principale del Medico.

Non contento il Carradori di limitare il suo sapere, e di approfondirsi in una sola parte della sapienza umana, con pari ardore si dedicò ancora allo studio delle Scienze naturali, per le quali era trasportato da un genio particolare: osservava e studiava tutto ciò che poteva meritare li sguardi d' un Uomo, che sa ove dirigerli, conoscendo egli bene qual vantaggio ne arrechi il tempo bene impiegato, e quale al contrario sia lo svantaggio per coloro, che lo perdono in un colpevole ozio.

Licenziato Dottore, fu dal Professore della Pisana Università Pignotti incoraggito o piuttosto stimolato a coltivare lo studio della Fisica, e da esso venne presentato nella Reale Accademia Economico-Agraria dei Georgofili di Firenze

al grande ed immortal *PIETRO LEOPOLDO*, in allora Regnante, come un Giovine di belle speranze. Studiò la Medicina pratica in Firenze sotto la scorta del celebre Dottore Alessandro Bicchierai, di quel grand' Uomo, che ad una somma dottrina riuniva ancora la più matura esperienza in questa difficile Arte, e la di cui memoria rimarrà eternamente cara alla sua Patria, e ai suoi Concittadini.

Ben presto fu il Carradori chiamato a cuoprire la Cattedra di Filosofia nel Seminario di Pistoja, e fu allora, che esso pubblicò la sua prima opera intitolata = la Teoria del Calore =, ove si fece conoscere egualmente dotto, che erudito, e dove si mostrò altresì affatto alieno da quei difetti, che d' ordinario occupano lo spirito di coloro che dal volgo vengono spesse volte distinti col nome di sapienti.

Siccome egli era d' un temperamento assai dolce, ed amava la tranquillità, quindi è che insorte delle turbolenze fra il Vescovo ed il Clero, egli abbandonò la Cattedra, si restituì in Prato, e il Sig. Carlo Mannucci, Uomo illustre per i suoi natali, ma più di tutto per dottrina, e per il suo amore alle Scienze gli offrì una ospitale accoglienza in una sua deliziosa Villa prossima alla Città, e gli somministrò i mezzi di spaziare nei suoi studi coll' uso della sua scelta Biblioteca. Frutto di tali occupazioni furono le Memorie, che fin d' allora dette alla luce in Agraria, e che gli meritarono di esser proclamato Accademico dei Georgofili. Non lasciò per questo di dedicarsi principalmente all' esercizio della Medicina, e nel 1796. ebbe la prima condotta in Prato sua Patria.

La stima ch' ei tosto si acquistò per la sua profonda dottrina, e per l' instancabile zelo, ch' ei mostrava nella cura dei suoi malati, gli fece anche meritare la considerazione del R. Governo Toscano, il quale, allorchè nel 1800. sopravvenne in Toscana l' Epizootia bovina, che spiegò i suoi maggiori progressi nelle Tenute annesse alla Real Villa del Poggio-a-Cajano, e nel resto della campagna Pratese, incaricò il Carradori di prender cognizione di questa malattia deva-

statrice del bestiame, e di praticare i mezzi i più opportuni per arrestarla. In questa circostanza spiegò il Carradori tutto l' impegno e attività, e rese poi conto al Governo, ed al Pubblico delle sue osservazioni e sperimenti per mezzo della sua *Istoria della Epizootìa* pubblicata colle stampe in Firenze nel successivo Anno 1801.

Non ostante la continua occupazione in cui lo teneva l' esercizio della Medicina, non tralasciò mai di esercitare il suo ingegno nello studio della Fisica, della Chimica e della Storia naturale, producendo i risultati delle sue ingegnose osservazioni e scoperte colle Memorie spedite alle più illustri Accademie d' Italia. Il Programma proposto sul modo di render fertili i terreni gli porse occasione di scrivere la sua bella Memoria sulla *Fertilità della terra*, che meritò il premio della R. Accademia dei Georgofili, e che successivamente aumentata, ed illustrata dall' Autore nelle diverse edizioni che in breve spazio di tempo ne furon fatte in Toscana e al di fuori, prese il carattere di un' Opera classica. Moltissime altre Memorie furono dal Carradori inviate all' Accademia dei Georgofili sopra alcune singolari proprietà e malattìe delle piante, che gli procurarono una quantità di medaglie, e ricompense d' onore. Le relazioni del Carradori non furono ristrette alla Toscana unicamente. Le sue corrispondenze con Spallanzani, con Brugnatelli, con Filippo Re, con Senebier, e con molti altri Uomini sommi d' Italia, e di là dai Monti, la corrispondenza colle principali, e più illustri Accademie fece comparire nei Giornali ed Annali chimici di Milano e di Pavia, fra gli Opuscoli scelti, e nella Biblioteca britannica le ingegnose Memorie del Carradori sopra i Sughi gastrici, sul Fosforo delle Lucciole, sull' attrazione di superficie, sull'Elettricismo, sulla virtù antiodontalgica di varii insetti, sulla respirazione delle Rane, sull' irritabilità animale e vegetabile, sulla trasformazione del *Nostoc*, sul sonno e su varie malattìe delle Piante, come pure sulla cultura di esse, di quella parte della Botanica, alla

quale sarebbe omai tempo che vi si pensasse tanto, quanto si pensò fin' ora alla nomenclatura.

La famosa scoperta della Vaccina occupò seriamente l' attenzione del Carradori, che volle colla più grande accuratezza e circospezione verificare l' utilità di questo ritrovato. Convinto d' un tale preservativo non lasciò di raccomandarlo cogli scritti, combattendo le opposizioni, che dall' ignoranza, e dall' errore si affacciavano contro una tale scoperta. Ad escludere ogni ombra di dubbio si procurò espressamente il *Virus* vaccino dal celebre Medico Sacco di Milano, ne fece l' inoculazione al suo primo in allora unico Figlio, e quindi lo sottopose pubblicamente alla controprova. Le di lui premure per la pratica della Vaccinazione nella Città e campagna di Prato furono apprezzate dal R. Governo toscano, che in ricompensa ascrisse il Carradori fra i Professori onorarj dell' Università di Pisa con una pensione annua sopra gli Spedali di Prato.

Quasi tutte le Accademie d' Italia si fecero premura di ascrivere il Carradori nel numero dei loro Soci, inviandogli ciascuna il suo Diploma. Nell' Anno 1816 fu eletto a pluralità di Voti uno dei Quaranta della Società Italiana delle Scienze in luogo del defunto Cav. Amoretti.

La scoperta del Galvanismo, che fece tanto strepito nell' Europa, richiamò costantemente l' attenzione del Carradori, come uomo intento sempre all' osservazione in tutte le branche delle Scienze Fisiche e naturali: insorta la gran contesa fra Volta e Galvani, seguitò con spirito imparziale i resultati, che l' uno e l' altro ottennero in favore del proprio assunto. Si dette premura di verificarli per mezzo di replicate esperienze, e si mise in grado di pronunziare un giudizio su questa gran lite. Resultato del suo studio, e del suo instancabile spirito di osservazione fu *la Storia del Galvanismo* pubblicata nel 1817, che il Carradori, malgrado l' atrocità del suo male, condusse ad ottimo fine, e nella quale maestrevolmente dimostrò e sostenne esser l' Elettricis-

mo di Galvani la stessa cosa che il fluido elettrico universale.

Tormentato il Carradori da una fierissima malattìa, avrebbe egli dovuto pensare a riguardarsi nell' avvenire per il vantaggio della sua Famiglia, ch' ei mai cessava d' amare teneramente; ma come eseguire questo dovere? come resistere a mille cose che si offrivano, e che forzavano i suoi sguardi e le sue ricerche a volgersi verso di loro? come ricusargli le sue veglie? Non ostante lo stato penoso di sua salute non trascurò egli di meditare sulle febbri, che si moltiplicarono nel 1817. conosciute sotto nome di *Tifo*, manifestando la sua opinione con una lettera diretta al celebre Professore Tommasini, e pubblicata colle stampe; e al tempo istesso pose mano ad altre Memorie in Fisica, e in Chimica, che la violenza del male sempre crescente non gli permise di terminare.

Esercitò la Medicina in Prato come Medico condotto per il corso di anni venticinque. Amò sopra tutto i metodi semplici; fu nemico dei sistemi, e il suo principale scopo fu quello d' attenersi sempre all' osservazione sul carattere delle malattìe, e sul temperamento dei malati, facendo sempre la più rigida ricerca delle cause dei naturali fenomeni accompagnata da una fedele e sincera esposizione dei fatti, per cui si distinse il Carradori dal volgo dei medicanti, non sottoponendo giammai i malati all' azione di medicamenti violenti, nè al pericolo di tentativi dubbiosi ed incerti.

Lungi dall' essere il Carradori di quella sorte di Dotti, la di cui Dottrina consiste più nell' esser loro stato mal a proposito concesso un certo credito, di quello che lo sieno essi veramente, e che ordinariamente si fanno titolo d' un sapere incomprensibile e visionario, era egli modesto fors' anche di troppo, non fu mai sollecito di estendere la celebrità del suo nome, e non si curò neppure di conservare la sua corrispondenza con i più grandi Uomini d' Italia, che sarebbe stata per esso un monumento perenne di vera gloria. Egli

era altresì semplice, affabile e sempre eguale con ognuno. L' invidia non la conobbe giammai, poichè essa non è propria che delle anime basse e volgari, le quali non son capaci d' inalzar se stesse, che sull' annichilamento degl' altri.

In tutto il corso della sua vita, e neppure nella prima gioventù, non vi fu intervallo, in cui possa dirsi, che il Carradori abbia amato la dissipazione. Le feste, li spettacoli, i divertimenti, quantunque sovente degni di curiosità, non ebbero mai per esso alcuna attrattiva; tutto il tempo, ove la sua professione non lo riteneva occupato, lo impiegava a studiare. La di lui condotta fu costantemente irreprensibile; egli fu buon Padre, buon Marito e buon Cittadino. Come medico non abbandonò mai il suo sistema d'osservazione, ed accoppiò costantemente alla più profonda dottrina una circospezione, ed una prudenza non ordinaria.

Il suo male durò per tre anni. Una continua oscillazione nel ventricolo formò il di lui più grande spasimo, e lo tenne per sì lungo tempo in uno stato veramente compassionevole. Morì di anni sessanta. La sezione del cadavere provò, che la di lui malattìa consisteva in una flogosi quasi gangrenosa del ventricolo, e fece riscontrare un vizio nell' orecchietta e ventricolo destro del cuore, cagionato forse dallo stato di violenza, e di agitazione del malato per sì lungo tempo. Fu sepolto nel Chiostro di S. Francesco di Prato, ed una lapide in marmo attesta i di lui meriti. La perdita di quest' Uomo fu di dolore per tutti i buoni. La Patria riconoscente volle attestare il suo cordoglio nei funerali, che furono fatti con pompa straordinaria a spese degl' amici, e in tale circostanza il Popolo tutto concorse a spargere delle lagrime di gratitudine sulla tomba di un Cittadino, che aveva beneficato i suoi simili, e reso illustre il Paese, che gli dette i natali.

# CATALOGO

*delle Opere e Memorie del Dottore Giovacchino Carradori.*

---

Nel Tomo XIII. della Società Italiana delle Scienze.

1. Del principio dolce degli Olj. Modena 1805.
2. Esperienze sopra della Plumula e della Radicula.
3. Lettera sopra la Virtù antiodontalgica di più Insetti. Prato 1793.
4. Esperienze, ed osservazioni sulla respirazione delle Rane.
5. Istoria della Epizootìa Bovina, che regnò nel 1800. Firenze 1801.
6. Lettere sopra l' Elettricità Animale. Firenze 1793.
   Nel Tomo 35 della Biblioteca britannica anno 1807.
7. Relazione d' un Viaggio per propagare la Vaccinazione.
   Nel Tomo VIII. num. 24. del Giornale de' Letterati di Pisa anno 1808.
8. Ricerche ed osservazioni su quella malattia del Gran turco detta Carbone.
   Nel num. 4. del quarto trimestre del 1818. dell' I. e R. Accademia dei Georgofili di Firenze.
9. Osservazioni sui Movimenti spontanei del Lupino.
   Nel num. 4 del quarto trimestre del 1818. dell' I. e R. Accademia dei Georgofili di Firenze.
10. Parallelo fra l' irritabilità degl' Animali e quella de' Vegetabili.
11. Della Fertilità della Terra. Firenze 1816.
12. Osservazioni sugl' Organi assorbenti delle Piante.
13. Riflessioni sull' Opera postuma di Spallanzani.

Nel Tomo XII. degl' Atti della Società Italiana delle Scienze, e nel n.° 9. del Giornale d'Agricoltura di Milano anno 1808.

14. Sperienze e Osservazioni sopra l'irritabilità della Lattuga.
15. Teoria del Calore. Prato 1787.
16. Sulla Vitalità delle Piante. Milano 1807. e 1817.
17. Degl' Organi assorbenti delle Radici delle Piante.
18. Opuscolo sul fluido elettrico, e sul Galvanismo. Firenze 1817.
19. Opuscolo sulle malattie delle Piante.
20. — — — sul fonno delle Piante
21. — — — sul Fosforo delle Lucciole.
22. Memoria sulla trasformazione del Nostoc. Prato 1797.

Nel Tomo XVIII. degl' Atti della Società Italiana.

23. Della Contrattilità dei Vegetabili.

Nel Giornale di Pisa.

24. Memoria sull' irritabilità della Cicerbita.

Nel Tomo XVIII. degl' Atti della Società Italiana delle Scienze.

25. Esperienze ed Osservazioni sull' imbiancamento dell'Olio.



Pietro Rubini
Professore di Medicina

# ELOGIO STORICO

## DI PIETRO RUBINI PARMIGIANO

SCRITTO

DAL SIG. PROFESSOR ANGELO PEZZANA

Bibliotecario Ducale in Parma

*Ricevuto adì* 28. *Maggio* 1821.

Un filosofo assai celebrato dell' ultima età usava dire, che per solito a' Principi si tributano lodi molto più durante il viver loro, che dopo trapassati; ma che i cultori delle Scienze per converso hanno tutt' altra sorte. Sinchè questi han fiato di vita o sono sferzati dalla critica, o sprofondati nell' obblio secondo che si levano ad altezza di grido, o rimangono radendo il suolo tra i moltissimi: ma non sì presto han mosso l' ultimo soffio che li odi levati a cielo; e non raramente avviene l' ombra d' uno scrittore illustre sia incensata dalle stesse penne che il vilipesero vivente, e che sembrano dannate dal fato a disonorare se medesime sì colla satira e sì coll' encomio.

Uno sciame di Accademie, del quale è inondata Europa, e che strappa tanti uomini allo stato senza che li acquistino le lettere, ha reso comuni i panegirici funebri. I più smilzi letterati da che son descritti nel ruolo d' alcuna di queste *Società* assicurano alla propria Memoria una picciola *apoteosi* di vero tanto oscura quanto fu tenebrosa la loro vita.

Ma l' uomo ch' io imprendo ad encomiare per comandamento di una delle più grandi ragunanze scientifiche d' Italia, nella quale fu sì degnamente noverato, l' uomo con cui

a gran ventura ho comune il natìo loco, levossi anche in vita a tanta sublimità di fama, che quasi stette muta a rimpetto di lui la critica mordace e scurrile, e che, raro ad avvenire, il suo panegirico tramuterassi frequentissimo in istoria. So che le mie laudazioni non possono aumentare la gloria di questo grand'uomo; ma se non hanno possanza alcuna per colui al quale son volte, divengon bisogno per colui che le scrive. E se dirassi che a cotant' uomo meno indegno panegirista addicevasi, risponderò del sì; ma che non ebbi potenza di oppor rifiuto all' onorevole comando. Anzi a non rifiutare strignevami imperiosa la mia ammirazione inverso lui; e dirò poi, che sulla tomba dell' uomo celebre non altrimenti che sugli altari non vi ha mano o cuore che non abbia ugual diritto di offerire fiori ed omaggi; che l' ammirazione non dissimile dagli altri affetti cerca di diffondersi, e che colui che n' è compreso, non misurando l' intervallo che lo separa dall' ammirato, non adonta di consacrare alla Memoria di lui un tributo volgare ed inutile. Persuaso che la forza del sentimento ne renda legittima l' espressione, io oso adunque offerirgli, ultimo dono di amico dolentissimo, questo elogio che ne sarebbe degno, se per laudare in convenevol modo un tanto sapiente bastasse il sentire la grandezza della sua perdita.

Non però questo encomio scompagnerassi dal santo vero. Collocato in certa guisa fra il secolo in cui vivo e la posterità, non posso sdimenticare che parlo di persona non più esistente a generazioni che esisteran lungamente, al cospetto delle quali diverrei colpevole affievolendo la verità che debb' essere il fondamento del mio dire.

Da questo mio dire emergerà infine come un uomo veracemente modesto pervenisse alla più alta meta del suo corso per cammino tanto più onorato quanto meno battuto, e di sì ardua uscita.

Il più delle volte dassi principio agli elogi degli estinti dal gloriare le loro prosapie. A me parve ognora essere im-

prendimento assai più travaglioso il creare la propria nobiltà, che lo ereditarla. Pertinace uscì d' uno schiavo (nè prendea vergogna di narrarlo egli stesso). Pertinace fu elevato allo Imperio del mondo per le sue virtù militari.

Pietro Rubini nacque in Parma a dì 24. di Agosto nell' anno 1760 da Antonio fabbro-ferrajo (1) e da Margherita Provinciali. In condizione meno umile non è maraviglia che i genitori procaccino una compiuta istruzione scientifica alla loro prole; e le più fiate ciò è conseguenza di abitudine, di calcolo, o di imitazione;

„ E ciò che fa la prima, e l' altre fanno „.

Nel caso presente non è così; e gran riconoscenza debbe aversi al padre di Rubini, che, sebben ripugnante e a dispetto di contraria fortuna, non si rimanesse dallo allevarlo per le Scienze.

Primo fra i più lodati nelle scuole grammaticali, conservò questo primato anche nelle filosofiche; e in tutte era mostro a dito per sottile intendimento, per diligenza, per sano costume. Però in quella età che appo gli uomini comuni non è che un ordito di debolezze, di passioni e d' errori, manifestossi in lui anima vigorosa, ingegno sublime, e prepotente affetto a' buoni studj: affetto dominatore di tutta la sua vita, e soggiogatore d' ogni altro.

Uscito de' filosofici insegnamenti, spontaneo e dopo matura diliberazione scelse di correr la via della medicina. Contro la quale scelta lungamente stettesi avverso il buon genitore che spronavalo all' ancudine avita, siccome quegli che temeva, a quanto sembra, di non poter trarre a compimento la sua educazione per la strettezza dello avere. Se non

(1) Antonio Rubini soprannomato *il Tedesco* era assai esperto nella lingua Tedesca, e servì come interprete di essa nell' Ospedale maggiore di Parma, e presso gli Anziani di questo Comune durante la guerra degli anni 1746 e seguenti. Era uomo di molto ingegno, ma neghittoso nell' arte propria, lo che facea le cose sue andassero più sempre a povertà.

che le preghiere dell' amorosa moglie, ed i consigli de' famigliari il rimossero alla perfine dall' aspro proponimento (2). D' allora Rubini consacrò intera la sua vita alle mediche discipline fuor solamente che non disgiugneva da esse quella sobria applicazione alle buone lettere, che senza nuocere alla gravità delle prime, ne raddolcisce e rattempera la severitade (3). Compiutone il corso, la corona di lauro, di che secondo l' usanza gli fu cinta la fronte nella Università di Parma, sarebbe entrata bastevol mallevadore de' suoi progressi, se meno agevole ne fosse stato a que' tempi il conseguimento. Michele Girardi, professore di Anatomia in questo Studio, ne rendette più sicuro conto colla veritiera orazione che pronunziò in sua lode nel giorno stesso in cui gli fu dato l' onor della laurea, sesto d' Agosto del 1782.

Dalla Università passò tosto a mandare ad effetto le ben apprese teorie, nel maggiore Spedale. Ivi stette due anni qual medico assistente ordinario, e tre altri come straordinario, nel qual tempo cimentossi ancora alla pratica di Città sotto la scorta del Dottore Serafino Gambara valentissimo medico pratico. Nè interruppe questo suo esercizio che per trasferirsi nel comune di Compiano a sostener la vece del medico di quel Tenere.

In tanta estimazione venne colà su, e in tanto affetto degli abitanti, che il voller poscia fermamente a loro medico nell' anno 1788: e già già di buon grado era per trasfe-

---

(2) Il rinomato chimico Lelio Guidotti padre del Chiarissimo nostro professore di Chimica, e il dottor Cornelio Muzzi, che furono i principali soccorritori della giovinezza di Pietro Rubini, rimossero dal proposito il suo genitore. È da notarsi che questi cotanto eravi deliberato, che finitosi dal figlio alcuni anni prima il corso de' rettorici studj, lo costrinse ne' conseguitanti mesi di vacanza a lavorar di sua arte sull' ancudine. Superato questo ostacolo si esigè da Pietro che alla Farmacia anzichè alla Medicina si desse interamente, ma la costante sua ripugnanza liberollo da questa seconda opposizione.

(3) Apparò anche le lingue francese ed inglese a gran pro de' successivi suoi viaggi.

rire colà sua stanza e la famigliuola, quando un regal cenno venne a sospenderne la dipartenza (4). Il Conte Giuseppe Camuti Archiatro del Duca, siccome colui, che a que' tempi era assai adentro nell' animo di questo, avea ottenuto, cosa allora inusitata fra noi, che si inviassero a spese dello stato alcuni giovani medici di ben promettenti speranze ad udire le lezioni de' più famigerati lettori di medicina nelle straniere Università: e conosciuto lo eccellente ingegno di Rubini designollo a compagno di altro giovine medico (5) (a cui il Conte Camuti era stretto per vincoli di natura) pel quale avea pure ottenuto dal Principe che viaggiasse a quello scopo medesimo. Fu provveduto in una al sostentamento de' genitori di Rubini.

Egli partì da Parma nel dì 30 di Novembre dell' anno antidetto e trasferissi all' Università di Pavia (6). Colà insegnava a que' dì la Clinica medica uno de' restauratori di questo principal ramo dell'arte salutare in Italia, il celebre Pietro Frank. Bene, o lettore, avviserai qual tesoro d' insegnamenti traesse Rubini da cotanto sapiente.

Ritornato in Parma nel vegnente Agosto, in sul cominciar di Novembre del 1789 per lo malagevole cammino di Genova, nella quale Città dimorò alcun giorno, volse i passi col solito compagno a Mompellieri, ed in quella famosa scuola di medicina, che aveva poc' anzi purificata e propagata la dottrina di Staahl, si stette sino al mese di Agosto dell' anno 1790, e si convinse come i più decantati suoi professori calcassero vie opposte fra loro nel metodo di curare le malattie. E paragonando i loro dettami con quelli dello

---

(4) Al capo di quel comune diede per lettere manifesti segni della dispiacenza sua del non poter mandare ad effetto il gradito convegno.

(5) Il dottor Luigi Borani, svegliatissimo ingegno, successo al Conte Camuti nella cattedra di Chimica, e morto nel fior dell' età senza dar principio alle sue lezioni.

(6) Ivi arrivò nel dì primo di Gennajo del 1789.

Studio di Pavia, potè sin d' allora considerar l' arte sua con quella saggia diffidenza ch' egli serbò sino allo stremo del viver suo, e che raro è scompagnata da' medici più profondi. Di questa diffidenza emerse fors' anco la risposta da lui data a chi pezza fa venialo interrogando, se alcuno de' suoi figli fosse inclinevole agli studj medici. E fu: „ Dio ne li „ tenga lontani „.

Di là passò all' Università di Lione per istruirsi precipuamente della medicina pratica di Vitet (7).

Ottenuta dal suo Principe facultà di trasferirsi in Edimburgo, parte da Lione il dì 29 Giugno del 1791, trapassa le romoreggianti Metropoli di Francia e d' Inghilterra (8), ove soffermasi sol quanto è d' uopo per conoscere i principali seguaci d' Esculapio, le Biblioteche e gli Ospedali, e giugne all' ultimo nella capitale della Scozia il dì primo di Settembre. Ivi soggiorna più di mezzo un anno, e non perde frusto di tempo: nè passa dì che tu nol vegga nell' Università prestare avido orecchio agl' insegnamenti di que' celebratissimi professori Monro, Duncan, Black, Rotheram, Hamilton, Home, Gregory (9); e negli spedali interrogarne e Chirurgi

---

(7) In alcune lettere scritte da Lione al dottor Jacopo Tommasini dà buon conto de' più illustri medici di quella città, gli dice che visita ogni giorno gli spedali, e che la chirurgia evvi ancor più fiorente della medicina. Non sembrò difatto ch'egli per rispetto a questa trovasse colà pascolo rispondente alle sue brame, poichè scriveva al Conte Camuti pochi mesi dopo il suo arrivo, che vi era rimasto abbastanza, e chiedevagli, *ove dovesse passare il verno*. Non pertanto rimasevi sino a' dì 29 di Giugno dell' anno seguente, forse per indugio nel ricevere le aspettate risposte da Parma in que' tempi travagliosissimi per la Francia.

(8) Arrivò in Parigi a' 5 di Luglio e partinne a' 7 per Londra, ove giunse a' 15. e rimase sino a' 28. In questo viaggio non ebbe a compagno il dottor Borani, che mal temperato a sanità aveva dovuto ritornare in Parma nel precedente anno.

(9) Insegnavano a que' dì in Edimburgo

Monro - Anatomia e Fisiologia,
Duncan - Medicina teorica,
Black - - Chimica, supplito di frequente per cagionevole salute da Rotheram allievo di Bergmann e Scheele,

e astanti e serventi ed infermi e quanti valgono con ogni minimo che ad accrescere il tesoro di dottrina che viene accumulando da recare in patria. Non isdimentica le scuole di botanica e di storia naturale. Dall'Università e dagli spedali affretta di andare alle biblioteche e alle case dei dotti, e da un monte di libri sconosciuti o mal noti o non trovabili in Italia estrae nuove ricchezze da aggiugnere a quelle prime. Insaziabile di conoscere la verità, dovunque egli passa a tutti ne chiede, e quasi la persegue di luogo in luogo. In una parola; sembra ch'egli voglia interrogare tutt' in un fiato ogni cosa da cui cavar possa istruzione, ed abbracciare quasi tutti i dominj della scienza della natura. Colà, come in ogni altra regione che percorre, osserva pria d' ogni altra cosa non già qual metodo sia in voga, imperocchè ben sapea che nel fatto della medicina ciò che ha nome di *metodo* non è soventi volte che un complesso poco metodico di sistemi e di vane applicazioni; ma quali sostanze medicinali sieno usitate nel curare le malattie.

Con uguali intendimenti, io credo, ragguagliato ogni cosa, visitarono le più culte provincie dell' antico mondo i due principi della medicina, Ippocrate e Galeno, duranti le loro famose peregrinazioni (10).

---

Hamilton – Ostetricia,
Home – – Materia Medica,
Gregory (figlio del celebre e celebre egli stesso) Medicina pratica e Clinica.

(10) Seguendo l'esempio di questi sovrani intelletti, e di tanti altri medici sublimi di tutte le età, Rubini viaggiò per manifesto convincimento dell'utilità che alla sua scienza sopra tutto appunto deriva dal viaggiare. E sì inviscerato fu, anche dopo, questo suo convincimento, che ne fece subbietto una eloquentissima orazione pel dottorato di Stefano Fortis avvenuto anni assai di poi la sua ritornata da Edimburgo. Ivi novera ancora parecchi scrittori, il Conrigio, Bartolini, Ramazzini, Vigaroux ecc. ne' libri de' quali *summa peregrinationis ad medicinam utilitas mirifice comprobatur.* Indi recando in campo le obbiezioni che si fanno a questa utilità, fra le quali colloca ultima: bastare al medico i patrj ospedali, *et lectulum aegrotantis utilissimum omnium librum;* prorompe con enfasi: *sed qualem, per deos, librum! obscurum. nempe, difficilem, involutum, quem videas quotidie a centenis ho-*

Non vanno inosservati a que' dotti Scozzesi tanta diligenza tanto sapere tanto studio e tanto acutissimo ingegno, e reputando essi a ventura lo annoverarlo fra i membri onorarj della loro Società Medico-chirurgica, tale appunto il nomano, chè di più non consente la sua forestieria (11). La prima fu questa delle molte somiglievoli onorificenze a lui compartite dalla dotta Europa.

E di tanto signorile suppellettile onusto abbandona quegl' isolani e valicata la Manica ritorna a Parigi, ove a soffermarsi lo stringe necessità di rintegrare la persona alquanto inferma (12). Verso il mezzo di Maggio del 1792 a salute restaurata partì di colà, e per la via di Torino ritornò in Patria fra gli abbracciamenti e il tripudiare de' suoi e degli amici nel seguente Giugno.

---

*minibus evolvi, quam levi, heu, cum emolumento, quam gravi cum discrimine!* Dopo che conchiude: *Quanto itaque non erit utilius in gravibus hisce tenebris plures diversarum regionum sagaces medicos praeeuntes cernere, eorum sequi tentamina, eorum vestigiis inhaerere.* Le quali ultime parole pajonmi venire a conferma di quella sua saggia diffidenza di cui narrai più sopra. Ed in sul cominciare di questa orazione avea detto: *Dulcis itinerum meorum optimi Principis jussu in eumdem finem olim susceptorum recordatio animo ... meo surrexit, meque ita complevit, commovit, rapuit, ut nullum ad hujusce juvenis laudationem, ad ejus meritorum probationem validius momentum haberi posse persuaserit.*

(11) È fama che al conseguimento di tanto onore influisse ancora la particolarità che son per narrare. Assistendo un dì alla lezione del professore di clinica-chirurgica, al quale Rubini era sconosciuto, fu richiesto da quello del come avrebbe eseguita l' operazione chirurgica della quale trattavasi allora allora. La sua risposta piacque per sì fatta maniera al professore, che fecegli offerire il coltello anatomico perchè la eseguisse egli stesso. Lo che rifiutando Rubini, siccome quegli che non era che semplice medico, il professore diede di piglio al coltello ed eseguilla secondo il metodo proposto da Rubini medesimo. L' effetto sì accociamente rispose allo scopo, che il Chirurgo Scozzese maravigliato confortò istantemente il Medico Parmigiano, secondo mi fu raccontato, a scrivere una dissertazioncella su questo fatto. È pur voce ch' ei la scrivesse. Le quali cose dan pegno del quanto egli valesse anche per rispetto alla chirurgia.

(12) Benchè infermo fu costretto nella trambusta di rivoluzione in cui era allora il Reame di Francia, e specialmente Parigi, a fare la sentinella per giorni parecchi.

Ma di sì lunghe fatiche, e delle dovizie recate da lui a questa sua patria venne a raccorre il premio nella università nostra ove fu istituita la prima volta, per lui, la cattedra di Clinica medica, e conferitagli definitamente il giorno decimo ottavo di Giugno dell' anno 1794 (13), dopo che, quasi a pubblico esperimento, ebbe nel tempo di mezzo dispiegata nel maggiore spedale la ricchezza del suo sapere al letto degl' infermi (14). Imperocchè al riaprirsi degli studj nel 1792 ivi appunto avea incominciate le sue lezioni, nelle quali ben corrispose l' effetto all'espettazione. Gran frequenza di uditori faceavi decoroso adornamento. Nè solo adolescenza; ma provetti e dotti, e stranieri e tutti plaudenti (15).

---

(13) Pria del suo ritorno avea avuto promessa che appena giunto in Parma gli sarebbe stata conferita qnella Cattedra; ma non si mantenne, e sembra che se ne andasse indugiando l' esecuzione, perchè si reputasse ancor troppo giovane per tanto incarico, quantunque in fatto gli fosse ordinato di adempirne le incumbenze nell'anno stesso della sua tornata. Dolealsi forte Rubini dello indugio e della scarsa rimunerazione, e sì aveane l' animo inamarito, che quasi era per accettare le seconde offerte de' Compianesi che ardentemente il desideravano. Dall' aprimento degli studj dell' anno 1792 sino al giorno 18 di Giugno del 1794 adempì adunque ai doveri di professore di Clinica senza averne il titolo.

(14) Fu in questo tempo di mezzo, che pel suo ardore di osservare, incidendo col coltello anatomico un cadavere di persona morta per cancrena, si ferì l' indice della sinistra mano, che restonne storpiato per sempre. Stette lungamente infermo di questa ferita. Allora visitollo il Conte Camuti, il quale sendo di cuor generoso, deposte dell' animo alcune amarezze inverso Rubini, siccome avea sapnto essere questi in grande strettezza di danaro, destramente senza ch' e' se n' addesse, ne frappose agli orieglieri un ricco viluppo.

(15) Il celebre dottor Giovanni Rasori scriveva a Rubini a dì 29 Aprile 1793: „ . . . nuove di voi . . . che mi „ riescirono gratissime, perchè ina„ spettate e sincerissime, trattandosi „ di una persona la quale non sapeva „ che avessi con voi particolare a„ micizia, furono quelle datemi da „ un Medico Siciliano, già mio ami„ co in Firenze, ed il quale passan„ do per Parma vi ha sentito con „ somma sommissima soddisfazione „ nella vostra Clinica. Me ne parlò „ pubblicamente nella stamperia di „ Comino. Gli lasciai terminare i vo„ stri elogi a me tanto cari, e poi „ mi scoprii per vostro intimo ami„ co. Se vi dicessi che vi ha senti„ to assai più volentieri che non ha

Frequenza e plauso che non discontinuaron poscia sinchè, spiacevole a ricordarsi ! dopo molta stagione cessò il farle. Non giova indagar quì le cagioni di questo cessare, che tanto grave fu più, quanto era prima maggiore la universale utilità. Tolti gl'impedimenti aveale poi ricominciate con festa pubblica l' ultimo anno di sua vita.

La storia dell' arte salutare dimostra ad evidenza che una sola scuola clinica debitamente fatta assai più di luce spande sugli studj medici che multitudine di altre scuole, ove si descrivono lungamente e spesso oscuramente, oggetti l' immagine de' quali senza il soccorso della facultà visiva, non trapela abbastanza limpida insino all' anima per le sole vie dell' orecchio.

Molti che furono suoi uditori, ora medici provetti e chiari, mel narravano più volte: tanto era l' ordine, tanto lo splendore delle lezioni di Rubini, che si scolpivano intere intere nelle menti loro sì che lunga pezza appresso avrebbono potuto ripeterle quasi verbo a verbo.

Di quì ha principio la sua celebrità. Il buon successo fu cote al suo ingegno, e lunge dal riposare sulle prime palme ei si diede con più vigoria e senza distrazioni a' suoi studj prediletti che doveano preparargli un sì glorioso avvenire. Sin da' primi anni la medicina erasi a lui presentata come la scienza che considera la natura ne' rispetti i più utili, e scorgendo egli le multiplici relazioni di questa scienza colle altre che le prestan lume, a tutte attinse con tale riuscita che non è concessa che a' più sottili e pronti intelletti. L' esperienza e l' osservazione, succedute per gran privilegio della nostra età alle sterili speculazioni precedenti, erano i suoi duci nel consultare la natura, e spaziando pe' campi, già allargati a que' dì, delle fisiche discipline, gran

---

„ sentito . . . non crederei per que-
„ sto di dire il maggior bene che ha
„ detto di voi. „

tesoro ne traeva di dottrina per le future sue opere. Ordine e costanza imperturbata appunto nello studiar la natura, e nell' osservare, ecco il sègreto che il levò in tanta rinomanza (16). Di questa divinità, che appellasi natura, sembra essservi nn picciol numero d' uomini a cui sia dato di sorprendere gli arcani. Altri attribuisce questo sovrano privilegio all' acutezza del loro ingegno ed altri alla loro fortuna. Io per contrario opino, precipuamente acquistarsi per la costanza dell' osservare e dello studio, fuor della quale non è durevole alcuna fama. I tesori dell' esperienza e del pensiero rassembrano a quelli che il terreno rinserra nel suo grembo. Non li discuopri che in grande profondità; e giù giù è d' uopo tu scavi assai, pria di giugnere a quelle sicure vene che sono la più nobile mercede della fatica e dell' industria. A fior di terra non iscopri che pietre o metalli ingannevoli, di cui l' infingardaggine si contenta ed il falso gusto si addobba. Di colui che attinge il suo sapere alla fonte dell' osservazione dirai a buon dritto che quanto sa è veramente suo. Tu nol trovi giammai esitante nel risponderti: in mille svariate guise interpreta e scolpisce i proprj pensamenti colla parola, e lo scorrer limpido di questa nasce dall' abbondanza del tesoro mentale. Oppongli ostacoli; di più ricchezza fa pompa; ringagliardisce nel combattere, e l' interesse che suscita ne' circostanti raddoppia per la sicurezza che in lui ritrovi. E tale era Rubini, o ch' egli discutendo quistione dubbiosa si argomentasse di dar giusto valore con severa critica alle testimonianze ed ai fatti messi in campo; o che tenendo ragionamento de' suoi viaggi ti ponesse sott' occhio ciò che aveva osservato in pro dell' arte e gli ostacoli che incessantemente si oppongono a' suoi progressi; o che ti venisse nar-

(16) L' epigrafe ch' egli collocò in fronte alla sua dissertazione che ottenne il premio dalla Società Italiana sembra venir confermando in gran parte questa mia opinione. Eccola: „ Quæ in natura eximie possunt ac „ pollent sunt ordo, prosecutio, se„ ries, vicissitudo artificiosa. „

rando qualche ingiustizia dell' opinione, di quella opinione che talvolta sorella della fortuna l' uno solleva a cielo mentre nabissa l' altro con iniqua bilancia .

Ora se a me delle mediche discipline interamente ignaro si addimandi qual fosse l' opinare del mio lodato intorno al famoso Riformatore Scozzese di ch' egli a grand' agio avea potuto conoscere la dottrina e la fama in Edimburgo, risponderò colle parole stesse di quell' altro onore vivente della nostra patria , Jacopo Tommasini , che pur da me interrogato di ciò veniami ponendo sott' occhi le lettere dell' illustre defunto che a lui dal bel mezzo della Scozia scriveva negli anni 1791 e 1792: „ benchè pria di ritornare da Edimbur- „ go si fosse mostrato ( in quelle lettere ) ripugnante dall' „ adottare la dottrina Browniana (17), pure determinato per

(17) Questa ripugnanza emerge anche da alcune lettere del dottor Giovanni Rasori a Rubini. In quella del 2. Aprile 1793 risponsiva ad una di questo, nella quale richiestone diceva la propria opinione intorno alla dottrina *Browniana,* dopo aver ricevuta la versione fatta da Rasori del *Compendio* ecc., scriveagli: „ A que- „ sto proposito mi risovviene che „ nella vostra lettera mostrate di es- „ sere ancora molto incredulo , e „ avrete perciò delle buone ragioni. „ Il dovere dell' amicizia vuole che „ me le esponiate ecc. „ In altre è accennato che Rubini proponevasi di scrivergli parecchie lettere *Antibrowniane* . Alle quali sollecitavalo Rasori; e spronavalo anche a pubblicarle colle proprie risposte ( V. la lettera del primo Luglio 1793 , e le seguenti presso gli Eredi di Rubini ). Ma Rubini cautamente non si lasciò indurre a scriverle. Di fatto il dì 3. Agosto del 1793 replicava Rasori da Milano: „ Ma e que- „ ste cento lettere *Antibrowniane* „ son elleno ite ne' campi della lu- „ na? „ Ecco le parole di Rubini ( estratte dalla sua lettera del dì 7. Gennajo 1792 a Tommasini ) circa gli *Elementi di Medicina* di Brown: „ Del resto il valore intrinseco del- „ l' Opera non è massimo. Brown era „ un medico ardito , quasi sempre „ ubbriaco, che è stato buona par- „ te di tempo in prigione pei debi- „ ti, e che dotato d' una immagina- „ zione capricciosa e fantastica, tro- „ vandosi in quel momento in cui, „ avendo Cullen scossa una folla di „ pregiudizj e di errori, la medici- „ na era in una specie di crisi, scel- „ se fra la folla di materiali disper- „ si e sconnessi i più facili a com- „ binarsi, e negando con una ardi- „ tezza da ciarlatano tutti i fatti che „ non entrano nel suo sistema, fon- „ dò una Teoria, che non è semplice „ se non se perchè è povera di fat-

„ avventura dal vedere gli *Elementi di medicina* ed *il Com-*
„ *pendio* di Brown pubblicati per ogni dove, commentati
„ con onore, accolti in quasi tutta la Germania e già adot-
„ tati anche in Italia da professori di molta fama, si deter-
„ minò a ponderarli nuovamente „. E quì narravami l' il-
lustre mio amico, com'egli stesso addottorato da pochi anni
gli fosse compagno in sì fatto esame, e come in rileggendo
insieme quegli Elementi pubblicati in latino dal cel. Moscati, Rubini soleva dirgli : *a misura che si procede nella lettura di quest' opera si sciolgono quelle difficoltà che dapprima pareano inesplicabili*. Indi soggiugneva il primo : „ se
„ Rubini per quella saggia prudenza che resse ogni suo pas-
„ so nella via della medicina andò a rilento o avverso nell'
„ adottare tutte le parti della dottrina di Brown, o se ne
„ rifiutò alcune, pare non pertanto ch' egli riconoscesse uti-
„ li almeno le fondamenta generali di quella dell' eccitamen-
„ to, se nella sua scuola clinica ne seguì i principj come e-
„ merge dalle sue lezioni raccolte da' suoi discepoli e dalle
„ storie mediche che facea compilare al letto degli infermi.
„ E quantunque scorgesse i voti e le mende della dottrina
„ di Brown, pure nella classificazione delle malattie, nell'
„ idea delle due diatesi *stenica* ed *astenica*, ed in quella
„ della debolezza indiretta fu Browniano „ (18).

---

„ ti. Non so se venendo in Italia,
„ ne porterò meco una copia, giac-
„ chè l' ho letto una volta, nè cre-
„ do che mi prenderò il pensiero di
„ leggerlo più. Non nego per que-
„ sto, che non contenga qualche
„ buona idea. „

(18) Questa sentenza del professor Tommasini consonasi a quella che diede già l' Istituto nazionale Italiano delle Scienze sin nell' anno 1805 intorno alla dissertazione di Rubini *sopra la maniera meglio atta ad impedir la recidiva delle febbri periodiche già troncate col mezzo della chinachina, coronata dalla Società Italiana delle Scienze*. Veggasi il tomo XII delle *Memorie* dell' accennata Società in fronte del quale ne stanno gli annali. Ivi a facce XVIII. e segg. si dà ragguaglio del premio riportato da Rubini, ed è inserita una lettera del segretario dell' Istituto predetto, Michele Araldi, nella quale tributandosi encomj a questa dissertazione, dicesi però che l' I-

Satisfatto di questa risposta pareami del pari notizia degna del presente elogio il dire quali fossero i pensamenti del

---

stituto vi ha trovato per entro una *certa condiscendenza a sacrificare alla Moda, e ad adottare non che il Neologismo, ma forse anche in parte le idee di un famoso Novatore di questi tempi.*

Nonostante ciò soggiugnesi tosto: *ma non pertanto, dalla solidità delle massime a cui appoggia i precetti e i ripari per lui opposti alle recidive delle febbri intermittenti, si raccoglie palesemente, che quel fondo di saper vero ed attinto a fonti più pure, di cui si mostra d' altronde provveduto gli è di una bastevol difesa contro i prestigi, co' quali i sistematici per solito turbano e pericolano le scienze che vantansi di assodare.*

Anche i compilatori del giornale intitolato *Bibliothéque Médicale*, nel commendare alcune obbiezioni fatte all' opera di Rubini intorno la febbre gialla da G. B. Michel in fine del primo estratto che ne diede nella Biblioteca stessa ( N.° 41. T. 14. *Novembre* 1806 ), reputarono Rubini seguace della dottrina di Brown. Vedi ivi la *Note des Rédacteurs*. Lafont Gouzi, medico di Tolosa, che voltò in Francese, e corredò di note la tanto lodata dissertazione predetta sulle febbri periodiche, allorchè partecipavagli nel dì 25 Marzo 1806 d' avere incominciata questa versione, diceagli: *quelque antipathie qu' on ait en France pour les écrits de l' école Brownienne, j' ai tout lieu de croire que le vôtre sera reçu avec applaudissem ent.* Il sig. Lafont Gouzi era uno de' più caldi propagatori della dottrina *Browniana* nelle Gallie, e carteggiò lungamente con Rubini. Dopo la pubblicazione di questa versione scrisse a quest' ultimo, che il *Journal de Médecine, Chirurgie et Pharmacie de Paris* compilato da Corvisart, Leroux et Boyer nel dar conto favorevole di questa dissertazione finiva col dire: *Cet ouvrage, qui est purement écrit, et auquel le traducteur a ajouté un assez grand nombre de notes, qui servent à confirmer ou à développer le texte, rarement à contredire les opinions de l' auteur, sera lu sans doute avec empressement par les admirateurs de Brown, et ( ce qui en fait mieux l' éloge ) sera goûté des vrais observateurs, ennemis de tout système exclusif en médecine.*

Anche il giornale di medicina di Montpellier compilato da Baumez parlava con lode di questa dissertazione *dans laquelle*, diceа, *on fait une heureuse extension des principes Browniens.* Ma il Sig. Sedillot per lo contrario le si levò contro; però Lafont scriveva a Rubini a' dì 29. Febbrajo 1808. *Lorsque vous m' aurez fait l' honneur de m' envoyer la réponse que vous vous proposez de faire à vos Critiques, je prendrai à mon tour la plume pour repousser les attaques virulentes de Sédillot Rédacteur du Journal de Médecine de Paris et pour refuter ses assertions.* Ignoro se questa risposta a' suoi critici uscisse mai dalla penna di Rubini.

Del resto questa bella dissertazione non fu solo coronata dalla Società Italiana, ma dal plauso universale de' medici Europei.

mio encomiato circa la *nuova dottrina medica Italiana*. Ma qui ancora stavami contraria la mia ignoranza nel tener ragione di sì fatte cose, e novellamente ebbi ricorso al primo sovvenitore. E a qual altro più acconcio all' uopo avrei potuto averlo, fuorchè ad uno de' principalissimi spositori ed ampliatori di questa dottrina, a colui che in più parti di essa si è già levato all' altezza dell' invenzione? Ed egli per gran cortesia veniami rispondendo in questa sentenza: „ Non „ può dirsi che Rubini fosse interamente avverso alla nuo„ va dottrina; imperocchè 1.° egli era *solidista*, come lo „ sono i seguaci di questa, allora quando considerava le al„ terazioni degli umori, non negate da alcuno, come un ef„ fetto dell' alterazione de' solidi, o dell' eccitamento: 2.° „ adottava la dottrina Browniana dell' eccitamento stesso, o „ della vita: 3.° adottava le due diatesi stenica ed astenica che forman pure le basi precipue della dottrina odier„ na: 4.° ammetteva, ed anzi illustrò più che altri lo stato „ morboso d' irritazione, che è ammesso anche dai moder„ ni, e che è cosa affatto diversa, come sosteneva egli stes„ so, dalle due diatesi stenica ed astenica. Ed il come egli „ concordasse in questi punti colla nuova dottrina si scorge „ dalle sue lezioni cliniche che van manuscritte per le ma„ ni di molti suoi alunni, e dalle opere da lui pubblicate. „ Valga per tutte la sua dissertazione premiata dalla Socie„ tà Italiana delle Scienze (19), nella quale riduce le febbri „ intermittenti a tre classi, *stenica*, *astenica*, *e d' irritazio„ ne*, non potendosi quest' ultima nè per le cause che la „ producono, nè pei rimedj che la domano, confondere col„ le due precedenti „.

„ Opinava diversamente dai sostenitori della dottrina o„ dierna ne' due punti che seguono: 1.° in quel terzo stato „ morboso, detto *d' irritazione*, egli ravvisava i caratteri

(19) Vedi la Nota precedente.

„ d' una terza diatesi, mentre la massima parte dei moder-
„ ni, in ciò seguaci di Brown, riducono l'irritazione ad una
„ *località*, perchè tolta la causa locale irritante tutti i feno-
„ meni morbosi di disturbo irritativo si dileguano, o almeno
„ cominciano a dileguarsi senza che la malattia faccia, sicu-
„ ramente, alcun corso posteriore, e senza che abbia un
„ incremento pur posteriore alla sottrazion della causa, co-
„ me lo hanno le malattie di diatesi: 2.° molti rimedj rico-
„ nosciuti dai moderni come atti a frenare positivamente lo
„ stimolo morboso ed a moderare o togliere la diatesi steni-
„ ca o flogistica, erano riguardati da Rubini come semplice-
„ mente irritanti, i quali per una contro-irritazione correg-
„ gessero gli effetti della irritazione morbosa (20) „.

A confermare le cose sovra dette per rispetto alla conformità di alcuni principj della dottrina di Rubini colla nuova Italiana viene anche il suo metodo curativo della febbre petecchiale dell' anno 1817 pienamente *antiflogistico* (21), come quello che fu pubblicato in Bologna da Tommasini, e come l' altro del chiarissimo protomedico Aglietti in Venezia. E vienci pure, ahi dolorosa rimembranza! la cura che ultimamente prescrisse, ma troppo tardi, a se stesso nella mortifera sua infermità.

Del resto una non avvi, pur mel diceva il Clinico di Bologna, delle dotte, acutissime, ed elaborate sue dissertazioni sparse nelle *Mem. della Soc. Ital. delle Scienze*, *nel Giorn. della Soc. Med. Chir. di Parma*, e nella *Biblioteca Italiana* (22), che non abbia l' impronta de' suoi principj del-

(20) Questa quistione è stata ampiamente discussa dal Prof. Tommasini.

(21) E quì e poscia io gioverommi delle parole stesse che fra i medici moderni hanno acquistata cittadinanza, a cansare qualunque equivoco in ch' io non medico potrei agevolmente avvenirmi.

(22) Il catalogo di tutte queste dissertazioni, come delle altre opere pubblicate o inedite di Rubini, sta a' piedi di questo elogio. E come fossero le pubblicate accolte con ammirazione da' principali medici e chirurgi d' Italia lo annunciano le scritture di questi. Ed anche le lettere

la *terza diatesi irritativa*. Ma l' opera in cui mirabilmente è svolto il Rubiniano concepimento dell' irritazione è quella ch' egli intitolò *Riflessioni sulle Febbri chiamate gialle e sui contagi in genere* impressa in Parma nel 1805 (23). Ivi egli schiera tutti i fenomeni della febbre gialla Americana, della petecchiale e del tifo sotto il vessillo di un irritamento prodotto e mantenuto da un principio straniero, ovvero dal miasma generatore di cotali febbri. I propugnatori della nuova dottrina per lo contrario, abbenchè consentano che nelle febbri contagiose l' azione primaria morbosa proceda dal potere irritante della contagione, pensano però, che all' azione irritante di cotesto principio straniero succeda prestamente un processo flogistico il quale esiga, entro certi limiti, quel genere di cura antiflogistica che vuolsi adoperare nelle altre malattie ingenerate da infiammazione (24).

Meno è discorde Rubini da essi nelle sue riputatissime *Riflessioni sulla malattia comunemente denominata Crup*. In quest' opera che è un giudizioso e laboriosissimo compendio di quasi tutti gli scritti di autori di diverse nazioni e de' loro giudizj su questa precipitosa e stranissima malattia, se ne trai ciò in cui egli attiensi alla sua teoria dell' irritazione, l' opinare di lui è conforme a quello de' moderni scrittori

---

in buon dato da essi a lui indiritte, tra le quali per brevità non rammenterò che quelle di Scarpa, Rasori, Morigi, Brera, Jacopi, Valli, Gelmetti, de Matthæis.

(23) Magistrale giudizio pronunciò di questa importantissima opera quel grande Italiano di Antonio Scarpa in una lettera famigliare ad un altro nostro celebre concittadino il dottore Nicola Morigi, Ispettore generale degli spedali, giudizio che giova quì riferire: „ Ho letto il libro di Rubi„ ni e mi è piaciuto assai. Vi regna „ dapertutto un giusto criterio, un' „ analisi esatta. I principj da esso „ stabiliti sui caratteri de' miasmi „ contagiosi sono certi; quindi egli „ ha preso il filo maestro che lo do„ vea condurre a determinare con „ sicurezza la vera indole della feb„ bre gialla. È un tifo contagioso in „ una parola non essenzialmente dis„ simile dal carcerario ecc. „ ( let. del giorno 2. di settembre 1805. ).

(24) Più d' ogni altro ha illustrato alla distosa questo principio il corifeo di que' propugnatori nella sua opera *Sulla febbre di Livorno del* 1804., *sulla febbre gialla Americ.* ecc.

intorno questa malattia, poichè e l' uno e gli altri l' hanno come infiammatoria, ed anzi egli tiene, che derivi da processo d' infiammazione la membrana *crupale* che si forma nel terzo stadio, e da cui dipende il maggior numero delle morti per rituramento della trachea o per soffocazione.

Da tutte le quali cose a me è paruto poter conchiudere che avendo Rubini cribrate con quella sua profonda intelligenza, e quella egregia costanza le svariate opinioni degli antichi e de' recenti medici, e degli uni e degli altri sceverati con esimio criterio i falsi da' sani dettami, comunque si dichiarasse, e fosse anco, avverso a tutti i sistemi come fonte d' errore all' incauta giovinezza, e spesso fatali all' umana razza; pure non isdegnasse, da quel saggio ch' egli era, di abbracciare la parte sana di questi ove reputasse poter essa giovare al perfezionamento di quella dottrina che gli parve la più sicura (25).

---

(25) Di questa mia particolare opinione intorno a lui sarebbe per avventura venuto a conferma un lavoro ch' egli stava preparando sulle multiplici quistioni, che con varia fortuna e soventi volte con aspro battagliare si vanno agitando ne' campi della moderna medicina. Sollecitato da un medico amico suo a scrivergli a dilungo intorno alcune di coteste quistioni, rispondeagli verso il novembre del 1818. scusandosi della cortezza delle risposte colle molte faccende e coll' ampiezza dell' argumento, e soggiugnendo: „ Se la questione cades- „ se su d' un punto, presto rispon- „ derei; ma mille sono i punti di „ disputa, e questi per la strana e „ contorta logica di molti fra i di- „ sputanti, sono anche difficili a trat- „ tarsi, e non una lettera, ma mi „ converrebbe scrivere un volume „ per ispiegarmi. Siccome però al- „ tri miei amici vanno facendomi pur „ delle inchieste su ciò, *io sto pre-* „ *parando*, ne' ritagli di tempo, *qual-* „ *che materiale per contentare gli a-* „ *miei desiderosi di sapere com' io la* „ *penso* „.

Forse a questi materiali (se non ai *cenni* che porrò qui sotto) apparteneva la seguente noterella scritta di fresco da lui sur un pezzolino di carta: „ Si lasci l' entusiasmo a' Poe- „ ti ed ai Pittori, a coloro che l' ar- „ ti e le scienze trattano che appar- „ tengono all' immaginazione. La me- „ dicina deve esser munita di una „ logica severa. Questa oppor deve „ una barriera insormontabile ad o- „ gni principio straniero: non si a- „ dotti un fatto che non sia tale. „ Non si generalizzi un fatto, se ciò „ non ordinano i fatti stessi. Non

Nell' anno 1804 si istituì in Parma un' Accademia coll'

„ si deduca dal fatto conseguenza „ che non ne scenda senza riparo. „ Non si attribuiscano effetti a cau„ se non sue. Altrimenti farem quel„ lo che si è sempre fatto, passerem „ d' errore in errore, di sistema in „ sistema „.

Aggiugnerò quì alcuni cenni intorno a' due Sistemi *Browniano* e *del Controstimolo*, che Rubini diede a' suoi scolari nell' Introduzione alle lezioni cliniche ricominciate due mesi prima della sua morte. Li trascrivo parola per parola come li leggo in quella Introduzione appena sbozzata e quindi non ancora da lui corretta.

„ La prima cosa che logicamente „ convien fare pria di adottare un „ sistema si è di ben comprenderlo. „ Ora si è ben compreso il Brow„ niano e il Rasoriano sistema? „ „ Combattere un sistema che non si „ conosce è tanto antilogico come „ l' abbracciarlo „.

„ Io non dovrei parlarvi di me. „ Ma lo ricerca il conto ch' io de„ vo di me al pubblico, e l' onore „ della nostra Università. Io fui det„ to Browniano, io fui detto Con„ trostimolista „.

„ Son lungi dal meritare la tac„ cia una e l' altra (così) quando „ s' introdusse Brown, vedasi Raso„ ri nella sua dedica, vedasi ciò che „ scrissi sulle intermittenti e Dati„ sca. (così). I miei scolari lo san„ no. „

„ Sulla teoria del Controstimolo è „ ben lungi ch' io abbia mostrato d' a„ derirvi. Veggasi ciò che ho scritto. „ Chi mi conosce da vicino lo sa „. „ Lungi da me ch' io predichi „ l' attaccamento alle antiche dot„ trine, lungi ch' io rigetti le nuove „ scoperte. Io non odio e non con„ danno che il fanatismo con cui si „ abbraccia un nuovo sistema senza „ depurarne le basi, senza analizzar„ ne con severa logica i principj, „ senza fissar con invariabile preci„ sione il valore de' termini ch' es„ so introduce „.

„ La logica severa prescrive in „ questa indagine del vero tre co„ se. Non adottar voci o termini „ nuovi senza ben conoscerne il ve„ ro e preciso significato. 2.° Non „ ammetter fatti che non sieno pre„ cisamente tali. 3.° Non generaliz„ zar fatti che semplici sono, ed in„ dividuali o particolari „.

„ La negligenza di questi tre prin„ cipj è comune a coloro che si la„ scian guidare dall' entusiasmo, ed „ è la sorgente di massimi errori. I „ nuovi sistemi accolti non colla logi„ ca, ma coll' entusiasmo, ci porgo„ no esempj numerosi e recenti di „ siffatti inconvenienti „.

„ Brown fondò il suo sistema sullo „ stimolo e sull' eccitabilità. Il primo „ scopo dovea essere di bene ed in„ variabilmente definire il senso da „ attaccarsi alla parola *stimolo*, quel„ lo della parola *eccitabilità;* e quin„ di nascendone una terza parola „ *eccitamento*, di essa pure dovea „ darsene il significato preciso. Que„ sto è ciò ch' egli non fece „.

„ I focosi seguaci suoi non cura„ ronsi di meglio intendere le pa„ role fondamentali, nè di fissare le „ idee corrispondenti. Mi sarebbe fa„ cile il dimostrarvi coll' analisi de'

appellazione di Società Medico Chirurgica (26). Egli ne fu uno de' principali fondatori, prima Segretario, indi Presidente. Ed anco uno de' principali a promovere e compilare il Giornale di questa Società, per entro al quale si trovano sue scritture in buon dato. Nè è da preterire ch' egli fu ancora de' trenta autori dell'altra *Società del Gabinetto Letterario Parmense*, ora così fiorente da noverare censessanta Sozj o presso: e che poi la presedette nell'anno 1815.

Le cose da me narrate sin quì sole basterebbono a di-

---

„ loro scritti tal verità. Altro non „ fecero essi che confusamente gri- „ dare coll' effervescenza dell' entu- „ siasmo, che i soli principj di Brown „ erano i veri, che la sola Eccita- „ bilità era l' unico principio di vi- „ ta, che la vita stava nell' eccita- „ mento, che tutto era stimolo, che „ questi principj riducevano la me- „ dicina a vera scienza „.

„ L' incertezza, il vacillamento e „ la confusione de' principj Brow- „ niani dovevan necessariamente in- „ fluire sul sistema nuovo che a quel- „ lo (così) si volea sostituire. Ra- „ sori in pronunciando la parola con- „ trostimolo non intese da principio „ che di proporre una modificazione „ del sistema di Brown in quanto „ che avendo Brown detto che tut- „ to agiva stimolando, egli sostenne „ che v' eran sostanze che agivano „ in un' altra maniera diversa, an- „ zi contraria, cioè, diss' egli con- „ trostimolando. Risultava da ciò che „ da' suoi premurosi seguaci non po- „ tevasi intender bene la parola *con- „ trostimolo*, se non era fissata l' i- „ dea di stimolo, non potevasi de- „ finire come agivano i Controsti- „ molanti, se non si era d' accordo „ del come agivano gli stimolanti. „ Or che si fece per ciò? Si sentì „ all' intorno gridar Controstimolo, „ Controstimolanti, Diatesi di Con- „ trostimolo, e di Stimolo; ma in- „ vano l' esaminator imparziale e „ freddo cercò fin quì di compren- „ dere ciò che sotto queste parole si „ doveva sottintendere. „

(26) I primi impulsi per la fondazione di quest' Accademia furono dati dall' *Amministratore generale francese Sig. Moreau de S.t Méry;* ma i principali suoi autori e sostenitori furono Rubini, Tommasini e il dottor Giuseppe Ambri. N'ebbe la presidenza, sinchè sopravvisse, il vecchio protomedico Serafino Dentoni, ne fu fatto Segretario con pienezza di suffragi Rubini, ed elettone vice-segretario Tommasini. Questi due ed Ambri furon pure i promovitori, i compilatori, gl'imprenditori del giornale di questa Società, di cui si pubblicarono quindici volumi in 8.° dall' anno 1806. al 1816. Negli ultimi anni per la morte di Ambri e per la partenza di Tommasini, tutto il carico della compilazione restò a Rubini. Egli fu proclamato Presidente perpetuo della Società a dì 19. Dicembre del 1816. I regolamenti di questa furono opera sua.

mostrare quanto operosi fossero i tuoi giorni, o celebratissimo estinto! ma poichè natura privilegiato ti aveva cotanto, tutte queste cose eran poco a riempiere que' tuoi dì: poco sarebbe stato il giovare la tua patria e le mediche discipline della tua voce e de' tuoi scritti, se all' umanità sofferente non fossi stato largo de' tuoi passi, della tua mano, del tuo senno. E quanto, e come tu il sia stato, alto il grida tuttora per le nostre case, e per quelle delle circostanti Italiche provincie l' universal desiderio di te, che venti mesi d' irreparabile orbezza punto non menomarono!

Già vedemmo come, prima d' intraprendere i suoi viaggi, dopo alcuni anni di esercizio nello spedale, benchè in freschissima giovinezza egli fosse, la fama e l' esperimento del suo pratico valore avessero spinto gli abitatori di Compiano ad affidargli spontanei le loro vite. Ritornato da Edimburgo ripigliò tosto in Parma lo esercizio dell' arte sua e questo congiunse coll' altro tanto suo operare in sin che visse. Grave e verace nel contegno sin da que' primi istanti, non fu veduto giammai imitare que' medici che ancor ricoperti della polvere delle scuole fanno ogni lor possa, perchè tu li creda da insopportabili faccende oppressati, ed or camminano solennemente e a lunghi passi, or frettevoli attraversano le piazze e i trivii più popolosi della città facendo sembianti di essere chiamati a guarir moribondi.

---

Essa acquistò di corto assai rinomanza anche fuori d' Italia, e molti dotti medici cercarono di esservi aggregati. Tra quali per brevità non rammenterò che i Signori *Saissy*, e *Balme* segretario generale della Società di medicina di Lione.

È quì da notarsi che Rubini essendo in Edimburgo scriveva a Tommasini a' 19. Novembre 1791: „ Che „ bella cosa sarebbe mai una Società di medicina in Parma, in „ cui con amichevole spirito i nostri dottissimi pratici spendessero di tempo in tempo un' ora, „ comunicandosi a vicenda le loro „ idee . . . la facoltà medica acquisterebbe la stima del paese, ed „ un lustro presso i forestieri . . . . „ saran questi miei desiderj sempre „ vani „? Tredici anni dopo si mandarono ad effetto i suoi lunghi voti.

Anche cresciuto in celebrità si mostrava così semplice e tanto poco sollecito di sè, che il Pubblico ben rimunerollo della sua modestia non discontinuandogli giammai, ciò che suol ricusare sì di frequente, quella somma considerazione, che solo il vero merito è sicuro di ottenere. E fuori e in patria questa estimazione divenne a poco a poco universale, e le genti facean ragione appunto a' suoi meriti come se già ei fosse stato fra gli estinti. Imperocchè è privilegio degli uomini grandi soltanto lo acquistare una gran fama ed il conservarla.

Ed allora si videro molte delle principali Accademie d'Italia e più d'una d'oltramonti, già ammiratrici delle prime sue opere, fare a gara nello aggregarselo (27). Delle

---

(27) Do il novero a me noto sin quì delle Accademie a cui fu ascritto Rubini, ed anco delle cariche di lui, in ordine di tempi.

1.° Nell'anno 1791. verso il Novembre fu aggregato, come si disse, alla *Società medico-chirurgica di Edimburgo;*

2.° Nel 1806. a' dì 10. Novembre, alla *Società Medica* di Bologna, come *Sozio Corrispondente;*

3.° Nel 1807. a' 19 di Aprile, alla *Società Italiana delle Scienze,* qual *Sozio ordinario attuale;*

4.° Nell' anno stesso a' 30. Luglio, alla *Classe di scienze esatte e naturali dell' Accademia Italiana*, come *Sozio cooperatore;*

5.° Nell' anno medesimo a' 7. Dicembre, alla *Facoltà medico-chirurgica Lucchese*, come *Corrispondente;*

6.° Nel 1808. nel dì primo di Settembre, alla *Società Medica Veneta*, qual *Socio esterno;*

7.° Nel 1809. a' 7. Novembre, all' *Accademia degli ardenti di Viterbo*, qual *Corrispondente;*

8.° Nel 1810. a' 7. Marzo, alla *Società Fiorentina de' Georgofili*, qual *Corrispondente;*

9.° Nel 1812. a quella di *Medicina di Lione*, come *Corrispondente;*

10.° Nel 1816. a' 26. di Giugno all' *Accademia Parmense delle Belle arti*, qual *Accademico d' onore;*

11.° Nell' anno stesso a' 7. di Settembre alla *Società di Medicina di Marsiglia*, come *Corrispondente;*

12.° E a' 19. Dicembre fu creato Presidente perpetuo della Società medico-chirurgica di Parma di cui era stato Segretario sin dalla fondazione, come ho detto nella nota precedente.

13.° Nel 1818. a' 20. di Ottobre fu ascritto alla *Società R. Borbonica di Napoli*, come *Socio estero.*

---

14.° Nel 1794. a' 18. Giugno fu

quali io rammento specialmente la *Società Italiana delle Scienze*, siccome quella che ebbe tanta parte negli affetti suoi, e che plaudente accolse ne' proprj Atti parecchie dissertazioni di lui, ed in cortissimo volger di tempo un' altra ne coronò, e lui aggiunse al numero de' suoi Sozj principali.

Più celebri Università il chiamarono nel loro seno; ma egli prepose ognora quella della sua patria; chè la carità della patria stette sempre in cima de' suoi pensieri. Di fatto qual godimento è da compararsi a quello che un cittadino prova fra le patrie mura, allora quando è conscio della estimazione della sua Città, e sovra ogni cosa allorchè sa di essere utile a' suoi paesani. Restò dunque in mezzo a quest' ampia famiglia volgendo nella pace que' giorni che per avventura qualche gelosa gara avrebbe potuto altrove empire di amaritudini.

Tante onorificenze e tanta pubblica reputazione non menomavano punto la sua modestia, erano anzi sprone a maggiore imprendere, e quasi preludio di ciò che non provocata gli venia preparando fortuna in mezzo a bellici rivolgimenti.

Le vicende dell' anno quartodecimo della presente età mutarono il politico reggimento di queste contrade, le quali, da provincia che erano di vastissimo impero, ritornarono

---

nominato Professore di Clinica-medica, come si è detto;

15.° Nel 1803. a' 22 Settembre fu Membro del *Consiglio generale* di questa Città;

16.° Nel 1804. a' 28 Aprile, della *Commissione centrale di beneficenza;*

17.° Nel 1805. del *Comitato centrale di vaccina;* indi Presidente a' 13. Dicembre;

18.° Nel 1811. a' 27. Giugno fu uno dell' uffizio de' *giurati medici* (e creatone vice-presidente a' 14. Ottobre del 1814.).

19°. Nell'anno stesso, medico consulente della *Soc. della Carità materna.*

20.° Nel 1814. a' 2. Novembre, Preside della Facultà Medica nell' Università degli studj.

21.° Nel 1816. a' 15. Maggio *Protomedico*, e a' 10 Luglio *Medico Consultore della Ducal Corte*, come si dirà in appresso.

a Ducato, come ne' tre secoli andati. L' Arciducessa Maria Luigia d' Austria per somma ventura nostra venne a pigliarne il freno; e fu allora che questa augusta Donna, fatta consapevole delle esimie virtù di Rubini, dall' altezza del suo trono (io io il vidi e l'udii!), circondata da tutto lo splendore del Corteggio, e presente l' Università degli Studj, volse lo sguardo a lui, ed accoltolo a parole di grandissimo onore lo elevò alla carica di *Protomedico*. Così fu visto Rubini salire alla maggiore altezza della sua carriera mondo da maneggi e da supplicazioni (28).

La gioja universale fece tal plauso a questa nominazione, che, s' ei ne fosse stato men degno, creduto avrebbe di meritarla. „ O virtù! dunque non è sempre vero che tu sia „ perseguitata sulla terra! ... Alcuna volta vengon dunque „ le onorificenze in cerca di te, e rabbellano la tua sempli„ ce modestia! „

Anche in questo novello suo stato ebbe per miseranda cagione a dar testimonianza luminosa di quella sua rara carità di patria. Uscente l' anno mille ottocento e sedici cominciava incrudelire fra noi la febbre petecchiale che da qualche tempo mieteva tante vite per le Italiche regioni. Provvidi Maestrati da regale munificenza sorretti curarono che a modo di provvisione si creasse un nuovo spedale lungi un trar d' arco dalla Città. Imperocchè i pubblici erano ahi! troppo angusti al multiplicare continovo de' miseri compresi da quella infermità. A lui principalmente, e a due zelantissimi Cavalieri (29) ne confidarono il reggimento. Venturo-

---

(28) Il decreto sovrano di questa nomina ha la data del dì 15. Maggio dell' anno 1816. Le parole di quella Maestà furono pronunciate nel dì precedente, che fu quello in cui l' Università giurò dinanzi a Lei i comandamenti dell' imperio. Mentre egli era quì innalzato a quella carica, la scolaresca di Pavia facea voti, perchè passasse colà ad assumere l' insegnamento della Clinica medica.

A' 10. Luglio dell' anno stesso fu anche nominato *Medico-Consultore della Ducal Corte* con ispeciale diploma di Sua Maestà.

(29) Gli egregi Signori Marchesi

se oltra ogni credere furono le loro cure, chè più lieve non poteva essere il numero de' malati che non ne uscisse risanato e benedicente. Il terrore che questo morbo aveva posto nelle nostre contrade fu dissipato per gran parte dall'avviso rassicurante ch' egli pubblicò, e dalla buona riuscita del metodo di cura da lui proposto e fatto pure di comune diritto colle stampe.

Alcuno penserà per avventura che Rubini ricco di tanta sapienza, elevato a tanta sommità, circondato da tante cure non avesse più campo o volere d' istruirsi delle opere che comparivano alla luce di dì in dì sopra la scienza sua o quelle che le fan corredo. Inganno! Egli non solo era provvisto de' *Giornali* che ne davano ampia contezza, e scorrevali avidamente, ma trasferivasi non rare volte in questo stesso santuario dell'umano sapere (30) nel quale io sto vergando queste mie povere pagine, per investigare quelli che a lui mancavano, e per chiedermi ragguaglio delle opere più frescamente uscite in luce. Ed ansioso ascoltava quel poco in ch' io poteva appagarlo, e faceane tesoro, perchè non adontava giammai di trarre anche da chi era da tanto meno di lui ciò che potesse accrescere la propria istruzione. Porgeva così un bello esempio a coloro che consumano l'ultima metà della loro vita nulla operando, il poco che fecero lodando, ciò che gli altri fanno, senza pietà biasimando, e ponendo ogni loro gloria nel tentar di distruggere quella de' loro colleghi, nello affliggerli e nel distrarli da' loro utili travagli.

E quante volte fra i dolci amichevoli parlari nol vidi io dolentissimo del non poter quì venire con più frequentazione; e satisfare a volontà le domande che gli andavan facendo di sue scritture alcuni Compilatori di *Giornali Italiani*

---

Domenico Manara, e Cesare Tassoni Estense, Ciamberlano di Sua Maestà.

(30) La Ducale Biblioteca di Parma.

( a' quali non pertanto concedevane alcuna ); e del non trovare istante per dar forma di opera alle restanti preziose notazioni (31) fatte ne' passati tempi , o che veniva facendo quando lo ingegno dettava !

A misurare la grandezza della perdita dell' illustre ch' io piango uopo sarebbe che i miei leggitori meco entrassero nello scrittojo di lui, ed ivi assisi fra le sue carte percorressero in quelle notazioni gli ultimi suoi pensamenti, e da ciò che a mala pena avea sbozzato argomentassero di ciò che rimanevagli a dire . . . . Sì : circondato da questi preziosi avanzi della sua dottrina più d'una fiata mi augurai di assembrarvi tutti intorno a me, voi che mi fate onore di vostra lettura, e dirvi : venite . . . vedete, imparate quanto costi un poco di gloria, e da quel che rimane quanto abbiamo perduto!

Ammirossi fin quì nel mio lodato la eccellenza dello Scrittore, e quella del medico. E per occasione toccai alquanto della sua modestia. Ora è mestieri ritoccare di questa, dire del suo carattere e mostrar lui posto in società sì come medico, sì come uomo, sì come padre di famiglia.

Rubini usava le grandi virtù e grandi cose operava senza fasto e coll' antica semplicità, ben dissimile da coloro che ne fanno di picciolissime e vituperevoli con orgoglio. E chi ignora che la vera grandezza sta appunto nella semplicitade? Ma questa bella virtù non è più reditaggio della nostra età; nè si contempla ormai che nelle imagini de' nostri antenati. Che se pure le era avanzato un asilo in mezzo a noi tu lo trovavi nella casa di Lui. Ivi tripudiava tra la decente frugalità e la domestica pace, le quali vegliavano d' ogni tempo ad allontanarne la caterva de' vizj che è spalliere del lusso. Ivi riposava sui sentimenti più soavi della natura. A questa modesta semplicità punto non nuoceva la gravità del suo contegno, non da artifizio, ma generata da natura e forse

(31) Gran cumulo di note ha lasciate su piccioli frusti di carta, che spesso poneva fra libri su' quali meditava.

accresciuta dal suono alquanto cupo della voce e dalla non superfluità del parlare. Lo che da taluno non rettamente fu creduto difetto di affabilità; che per lo contrario era socievole assai, e di maniere decorose e rassicuranti nel ministerio dell' arte sua (32). Dicano tutti coloro che andavano a lui per infermità, con quanta amorevolezza li accogliesse, o ch' ei fosser ricoperti di bisso, o di poverissime vestimenta. E come li confortasse e dolcemente li soccorresse de' suoi consigli.

Se penetri adunque nell' interno di quella sua casa, nobile spettacolo e commovente ti si para dinanzi. Figlio, marito, padre virtuoso adempisce a questi sacri doveri come si narra de' Patriarchi. Venera e vuole sieno venerate dagli altri le domestiche virtù ne' genitori (33), le riceve in dote dalle due consorti, le insegna egli stesso col proprio esempio a' suoi figli. Tu vedi questa semplice ed esemplare famiglia stretta ne' più dolci nodi trapassare giorni deliziosi, sotto l'usbergo di non severa ma inalterabile disciplina, nella pace nella concordia nella virtù. Lui vedi circondato della sua giovinetta prole foggiarne le anime ancor tenere alla religione, alla morale, alle buone lettere, stringerla fra le sue braccia, bagnarla di lagrime affettuose e additarle ancora le vie dell' onore e della rinomanza. E comporre dolcemente le puerili discordie; alternare con mirabile vicenda gli scherzi innocenti e i giuochi fanciulleschi ai primi rudimenti della geografia, della storia, della fisica; soddisfare ad ogni inchiesta ancor soverchia, e ridir le cose già dette senza dar segno di noia, e condir gli atti di severità con balsa-

---

(32) Ciò è sì vero, che guadagnavasi agevolmente anche la confidenza del gentil sesso il quale ama s' interroghi la natura senza sollevare il velo dell' onestà, e senza ne trepidi il pudore.

(33) Onorò per singolar modo i suoi genitori, e sinchè vissero ebbe per essi la più rispettosa sommessione: e vissero lungamente. Nella loro vecchiezza raddoppiò le cure figliali. Anche provetto amava di udire i loro consigli, e seguirli, e additare ai loro nipoti la veneranda loro canutezza.

mo di paterna amorevolezza. Assente solo un di dalla cara famiglia, li vedi al ritorno, que' suoi teneri figli, in sulle soglie affollarsi tutti festosi intorno alle sue ginocchia, e premersi e lanciarsi a gara per esser primi ad ottenere il paterno amplesso. Come uscirai da questo commovente spettacolo senza gridare: Quì quì s' impara a non vergognarsi d'esser uomo!

Questo amore di famiglia spignevalo a curare egli stesso non poche minutezze della domestica economia, chè non le reputava già indegne d' uomo consecrato agli studj. Compartitore avvedutissimo del suo tempo ( privilegio di pochi! ), anche a queste trovava ora, siccome non mancavagli all' educazione de' figli. Una eletta raccolta di libri dà ancora malleveria del suo gusto sì nelle scienze e sì nelle lettere, come la dà del suo amore per le arti una collezione di buoni dipinti e d' intagli in rame. Amava pur assai la poesia e lascionne alcun saggio inedito fra le sue scritture. La musica (34) ed il Teatro comico erano anche suoi frequenti sollievi alla diurna stanchezza, e siccome d' ambo conoscea pur assai, così vi poneva tanta attenzione, ove ciò che si rappresentava ne fosse degno, da adirarsi con chi veniala interrompendo. Di questa sua ira innocente fui testimonio ( non colpevole ) io stesso più d' una volta.

Non ostante che fosse desiderato e festeggiato da grandi e potenti, fuori della sua famiglia non gustava veraci dolcezze che infra gli amici. Imperocchè la sua modestia era sincera, ed amava sopra ogni cosa la quiete e l'ugualità. La sua amicizia era verace, non già di quelle tumultuose che abbisognano di scoppio e di agitazione, ma sì dell' altre che hanno più sembianza di felicità che di passione, e l' incanto di cui s' insinua a poco a poco ne' cuori, ed aumenta coll'abitudine. Quindi non disamò la moderata giocondità de' conviti in amichevoli brigate.

---

(34) In una orazione pel dottorato di Ferdinando Piceni trattò dell' utilità della musica con tanta eloquenza e con sì eletta erudizione, da dimostrare quanto finamente intendesse anche quest' arte.

Raro opponevasi all' opinare altrui, nè gli altrui difetti metteva giammai in ischerzo. Casti e verecondi furono in ogni età i suoi detti. Parlava sempre riguardosamente de' suoi Colleghi, e udivalo io stesso talvolta encomiarne alcuno che a tutti non parea levato in fama. Dal che forse derivò minor caterva d' invidiosi si alzasse contro lui. Dico minore, che da sì fatta peste non andò immune nè pur esso ... E si dovrà sempre pronunziare questa abbominevole parola d' invidia allorchè favellasi d' uomini egregi! Morbo vile e feroce, comune a tutte le età e a tutti i paesi tu se' l' avvilimento dell' umana razza!

La sua benignità facea ch' ei non odiasse negli uomini nè pure la malvagità ed i vizj, benchè giustizia fosse la guida d' ogni sua azione, nè alcun vizio il contaminasse. „ Si „ rammentava, (dirollo colle parole di un eloquentissimo mio „ amico) si rammentava, cred' io, di quel Trasea Peto che „ ne' tempi Neroniani, cioè in tempi scelleratissimi, fu san- „ tissimo senatore, solito a dire: *chi odia i vizj odia gli uo- „ mini*. Tanto è proprio della virtù una certa benigna man- „ suetudine verso i difetti dell' umana condizione „.

Richiesto diffondeva liberalmente la sua vasta dottrina. Non curava d' indagare o d' ascoltare i fatti altrui (*), perchè era solito custodire i proprj.

Doleasi soventi volte di non poter fare per la sua patria tutto quel bene che avea nel pensiero.

Sotto sembianze alquanto austere il suo carattere era dolce e tranquillo, perchè aveva riflettuto intorno a' proprj doveri e non torceva un passo dal sentiere della virtù.

La sua immaginazione non era ardita, ma sicura, misurata,

---

(*) Ma se, pervenuti come che fosse a sua saputa, poteano recar nocumento ad alcuno, procacciava d' impedire l'effetto. Un illustre mio amico elevato di fresco da' proprj meriti a' Vescovadi di Savona e Noli faceami noto a questi ultimi dì, che parecchi anni sono, Rubini adoperò ogni suo potere, perchè non si stampasse una Scrittura di autore estinto, *non favorevole alla S. Sede*.

simile a placido fiume che abbraccia lentamente gran vastità di paese . Ancor giovine avea la calma della vecchiezza , e sembrava da lungo tempo avvezzo allo spettacolo delle umane vicende.

Negli ultimi anni del viver suo avea preso amore alle faccende campestri, e la cultura di due poderetti, frutto de' suoi sudori , era talvolta graditissimo ristoro alle sue gravi fatiche, ed alle perturbazioni della vita. Però delle cose rustiche amava di ragionare anche meco ogni volta ch' egli meco si trovava . Non han cari i campi che le anime dolci e tranquille. L' avaro, l' ambizioso, l' uomo soggiogato dalle passioni non s' accorgono se la natura sia ricca o feconda, se il cielo sia puro, se i fiori spandano intorno un' soave olezzo.

Ma infra tante sue doti ch' io venni rammemorando sino a quest' ora ancor non dissi di quella maravigliosa sua beneficenza che a tutte l' altre sta sopra. Maravigliosa, perchè quasi ignorossi fin ch' ebbe la persona viva. Nè di quella io seppi che pochi dì appresso la sua morte in quello stesso Scrittojo in cui, o Leggitori, avrei voluto adunarvi a contemplare gli avanzi della sua dottrina. Ivi dalla desolata vedova e da' lagrimosi figliuoli, che pur l' ignoravano lui vivo , udii com' egli fosse largo a' miseri non solo delle sue cure qual medico , ma di caritevoli soccorrimenti senza ch' altri il sapesse, da que' miseri stessi in fuori. Da' quali rifiutava insino le parole di gratitudine , perchè nel sovvenire agl' indigenti null'altro tenea di fare che un atto di giustizia. Nè fu sciolta la loro voce a propalare il beneficio occulto, se non dopo egli fu spento, per iscoppio di animo riconoscente. E ben chiaro si appalesa che a quelle cure ed a que' soccorsi da null' altro era spinto che dalla pietà di animo beneficente, imperocchè non eran questi i mezzi di salire a dignità.

È vero non essere giammai più onorevole il ministerio di un medico che allora quando si esercita nella dimora angusta e mal sana del povero. Ne' vasti palagi e fra le grandezze questo nobile uffizio veste le sembianze, o apparenti o reali, dell' interesse . Ma dalle case del misero stan lungi i

protettori e la cupidità: quì non è rinomanza: quì tutto tace, meno il dolore che le fa risonare de' suoi singhiozzi: quì è pur possibil cosa il fare opere buone: quì l'uomo può soccorrer l'uomo senza testimonj: quì la verace beneficenza, e la tenera pietà hanno alzato il loro trono: quì sei certo di trovar lagrime da rasciugare, e sventure da compiangere. E quì appunto quante volte non avresti ritrovato Rubini..! E quante volte non avrà egli detto in cuor suo al terminar del giorno „ feci ogni mia possa per sollevare la povertà dalla „ fame e dal dolore; dolci saranno i miei sonni, poichè ho „ sparsa la calma nel seno dello sventurato „.

Rubini passava dal letto del povero a quello del ricco, e da questo a quello de' grandi; vale a dire conobbe ogni genere di miserie; ma non obbliò giammai, che solo in mezzo ai poveri accumulò il tesoro di esperienza e di sapere che possedeva.

Ammogliato erasi la prima volta nell'anno 1794. a saggia, avvenevole e gentilesca fanciulla (35) che dalla cruda nemica di ogni essere creato gli fu tolta dopo due olimpiadi. N' ebbe tre figli: unico rimane Giovanni, al quale pose affetto più che di padre, se àvvene da cui questo sia vinto. E il meritò per mirabile figlial tenerezza, per sommessione, per bontà di costume e per amore a' buoni studj (36). La tenera età di quello, altre domestiche circostanze, e le qualità laudevoli di Maddalena Tagliavini fecero che poco appresso si rimaritasse con lei (37). Dalla quale gli furono procreati sette figliuoli, di cui restano cinque (38). Il maggiore di questi giovinetto di promettente svegliatissima indole già mandò lampi di facile poetare, benchè appena aggiunga

---

(35) Maria Amalia Savazzini.

(36) L' Augusta Duchessa nostra nominollo *Studente di Bibliografia* in questa Ducale Biblioteca un mese dopo la morte dell' illustre genitore di lui. Questi aveane più volte a me dimostrato vivissimo desiderio.

(37) A dì 7. Novembre del 1802.

(38) L' ultimo era lattante allora quando restò orbo del padre.

il quinto decimo anno. Il diciassettesimo volgeva da che nella massima conjugal tenerezza e nella più perfettissima concordia vivea Rubini con questa amorosa compagna allora quando . . .

Ahi Vedova desolata! ahi misera Prole! . . . deh! perdono s' io pel tristissimo tenore del mio uffizio riapro l' acerba mal chiusa piaga del vostro cuore! Cessate il pianto, e rammentate che „ la pompa funebre dell' uomo giusto è il trionfo „ della virtù che ritorna al cospetto dell'Essere supremo „.

Ne' primi giorni del mese di Aprile del passato anno ammalò Rubini di grave supposta infreddatura, che per alcuni intervalli di mendace miglioramento gli concesse qualche settimana dopo di trasferirsi al Magistrato degli studj, nel quale presedeva alla medica Facultà. Io il visitai per l' ultima volta, ahi crudo ricordo! la sera stessa del dì ch' erasi trasferito colà, ed egli narravami appunto il perchè del suo uscire, il procedimento della sua malattia, e la speranza di vicina intera salute. La quale speranza viene a raffermare il detto di alcuni medici, ch' egli da prima ravvisata ben non avesse l'indole della sua infermità, che fatalmente sviluppossi così lenta in incendimento di pulmone (detto con greco vocabolo *Peripneumonìa*) da velare la verità a lui veggentissimo.

È fama vi avesse fin da principio chi il consigliasse a farsi trar sangue, ed egli non reputando allora necessario questo rimedio non lo adottasse, che quando l' infiammagione di quell' organo vitale era innoltrata cotanto da non potersi più infrenare coi soccorsi dell' arte. Fatto poi accorto che ogni speranza di vita era spenta, dicealo egli stesso con imperturbata fermezza a' circostanti; ed il ripetea due ore prima di morire al suo diletto figlio Giovanni che pur confortavalo, secondo il desiderio ardentissimo, a pensieri di guarigione. E per converso confortava lui novellamente a calcare le sante vie dell' onore e della virtù, e a sostenere da forte sì grande disavventura. O egregio estinto, se minore fosse stata la tua modestia, ben potevi dirgli allora:

„ Disce, puer, virtutem ex me, verumque laborem ! „

Passò di questa vita nell' ora sesta dopo il meriggio del giorno quintodecimo di Maggio (39). Serbò l' interezza della mente sin che respirò, e quando dal battere dell' arteria s' avvide com' era presso l' ultimo istante, già ristorato d' ogni divino soccorrimento, a questo punto fatale si apprestò colla calma dell' uom giusto. Avvezzo da quarant' anni a meditare sulla natura, avea imparato a conoscerne le leggi, ed a sottomettervisi. Questa calma del momento estremo fu co-

---

(39) Fu sotterrato nella chiesa parrocchiale di S. Bartolommeo nel dì 17. Assistettero alle esequie mestissime l' intera Università ed il *Protomedicato*. Il valente professore di anatomia, poscia successore di lui nella Scuola Clinica, Dottore Antonio Azzali, trapassato pur esso ( a dì 18. Aprile del 1820. ) recitò in quel lugubre apparato una breve ma verace orazione funebre; ed il ch. Padre Abate Don Ramiro Tonani scrisse in sua lode la seguente iscrizione:

HONORI · ET · VIRTUTI . PETRI · RUBINII
PHILOS · MED · CUM · PRIMIS . ILLUSTRIS
ACADEMIAE · ITALICAE
SOCIETATIB · ITAL · SCIENTIARUM
NEAP · ET . FLORENT · ΓΕΟΡΓΟΦΙΛΩΝ
SOCIETATIB · MEDICIS · VEN · BONON · LUCEN·
MASSILIEN · LUGDUNEN · ALIISQ.
MERITISSIMO · ADSCRIPTI
IN · PATRIA · DOCTORIS · CLINICES
PRAESIDIS · MEDICES . IN . ATHENAEO
ET · SOCIET · MED · CHIRURGICAE
REI · MEDICAE · TOTA · DITIONE · PRAEF .
M . LUDOVICAE · AUG · D · N · AD · CURATIONES
IDENTIDEM · EVOCATI
PIETATE . MODESTIA · CANDORE . ANIMI
IN · VOBIS · O · CIVES · HOSPITESVE
CELEBRIS · PROBATI · UTILITATI · OMNIUM . FACTI
HEUS · AD · PARENTALIA
AD . PRECES.

Anche il benemerito Segretario del *Protomedicato*, Sig. Dottor Uberto Bettoli scrisse un' orazion funebre in morte di Rubini.

E tacendo di tanti altri encomj dati a questo grand' uomo in que' dì, veggansi quelli che dalla Cattedra gli tributò l' illustre Tommasini, inseriti nella Gazzetta di Bologna, e ripetuti a facce 196. di quella di Parma, 1819.

mune a parecchi medici insigni. In simil punto diceva Hunter al suo amico De Combe: „ Così potessi sostener la penna , „ come scriverei quanto sia facile e dolce il morire „ ; ed Haller al Sig. Rosselet: „ Amico mio, l'arteria non batte più „. Il grand' uomo morente è cosa augusta e miranda : a misura che si stacca dalla terra sembra vestire qualche parte di quella natura divina in cui va a tramutarsi.

Poche ore prima della sua morte Rubini avea dettata e sottoscritta colla propria mano compassionevolissima epistola ad illustre dama (40) che il maggior posto d' onore tenea presso la Maestà di MARIA LUIGIA, affinchè alla clemenza di questa accomandasse la propria famiglia, ed in ispezieltà il suo Giovanni (41).

Del resto Rubini morì nella commovente semplicità d'un padre di famiglia, circondato da' suoi e dagli amici, e bagnato dal loro pianto. Conscio dell' indole virtuosa della cara prole discese nel sepolcro con tranquillità, ed i suoi occhi vicini a chiudersi eternamente non versarono che lagrime di tenerezza e di commiato.

Rubini ebbe alta e proporzionata persona, occhio vivace, breve la fronte , neri e folti capellatura e sopraccigli, lo che consonando colla brunezza del volto e colla gravità del contegno accresceva la severità de' lineamenti . Toccossi già come non pertanto fosse di dolci maniere e cortesi. Nemico d' ogni mollezza o pompa vestiva pulitamente ma con somma modestia.

La sua vita e la sua morte furon degne l' una dell' altra. La moglie ed i figli anco nello stremo dell' angoscia ebbero di lui le più tenere cure. Il dì 15. di Maggio dell' an-

---

(40) Sua Eccellenza la Signora Contessa Elisabetta Scarampi, Dama d' onore di Sua Maestà in quel tempo.

(41) Durante la malattia quest' Augusta Principessa volle per gran degnazione inviare „ alla casa di Ru- „ bini il primo medico di Sua Cor- „ te il Ch. Sig. Dottor Luigi Frank „ per avere direttamente nuove del- „ l' ammalato „ . Vedi Gazzetta di Parma , 1819. facciata 164.

no 1819. fu giorno di lutto per ogni ordine della Città nostra; imperocchè la morte dell'uomo illustre e benefico è pubblico infortunio. E tanto più amara fu questa perdita, quanto era manco da aspettarsi in tale verdezza di virilità (42). Le madri di famiglia, gli amici, i poveri bagnarono di molto pianto la sua tomba; e qualche fiore vi sparserò i poeti.

Decoroso, non superbo, è il monimento di che coprirono le sue ceneri la vedova ed i figli, ma già s'avanzò la posterità ad erigerne uno più maestoso e più durevole sulla base della sua fama e delle sue opere;

„ Quod nec imber edax, aut Aquilo impotens
„ Possit diruere, aut innumerabilis
„ Annorum series, et fuga temporum „.

E dell'altro tacerò, pure trionfatore de' secoli, che da se stesso erasi innalzato ne' cuori e nella venerazione de' suoi concittadini.

Ecco i veraci monumenti: gli altri sono quasi interamente „ il patrimonio dell'amor proprio de' viventi ai quali addi- „ tano nello specchio del futuro le speranze de' gran nomi „ e gli omaggi di che è larga la posterità. „

Questo ufficio estremo io rendeva al trapassato mio amico, uscente l'anno 1820 (43).

---

(42) Morì d'anni 58, mesi otto, e giorni 21. Però correggasi la Gazzetta di Parma dell'anno 1819, che a facce 164 col. 1.ª lin. 4.ª e 5.ª dice che *non aveva compiuto l'anno sessantesimo di sua vita*, ed a facce 196. col. 2.ª, che *vixit. annos. LVIII. Mens. III. Dies IX.*

(43) A chi dirà essere le presenti lodi di Pietro Rubini maggiori del vero risponderò: Sono quelle che in ogni angolo della sua città si odono anche oggidì nelle bocche de' grandi, de' ricchi, de' poveri, d'ogni ordine di cittadini, e che da questo centro allargandosi intorno in torno come onde, si ripetono per le restanti Italiane città, e in altre Europee. Per giudicare degli uomini bisogna consultare la fama, credere alla fama e non ad alcuni uomini, imperocchè questi possono ed ingannare ed ingannarsi: ma nissuno ingannò una generazione intera, ed una intera generazione non ingannò giammai alcuno . . . . *talesque nos crede, qualis fama cujusque est. Huic aures, huic oculos intende: ne respexeris clandestinas existimationes, nullisque magis, quam audientibus, in-*

## OPERE DI PIETRO RUBINI

I. *Sull' attività della Datisca cannabina di Linneo contro le febbri intermittenti* ( 1794 ).

Questa dissertazioncella sta a facce 431. e seguenti del t. 7.° delle *Memorie della Società Italiana delle Scienze.* Ivi per equivoco Rubini fu detto Professore di *Chimica* in vece di *Clinica:* equivoco che fu copiato dal *Giorn. della letter. ital.* t. 5.° facciata 269. ( Mantova ), ove si dà un cenno con lode di quest' opuscolo; da quello *de' Letterati*, t. 100, facciata 23. ( Pisa ); e dalle *Mem. per serv. alla stor. Letter. e civ. Gennajo* 1796. facciata 35. ( Venezia ).

II. *Sull' azione specifica della chinachina sulle vie urinarie* ( 1799. ).

Sta a facce 665 e seguenti del t. 8.° delle mentovate *Mem. della Soc. Ital.* ecc.

III. *Dissertazione sopra la maniera meglio atta ad impedir la recidiva delle febbri periodiche già troncate col mezzo della chinachina , coronata dalla Società Italiana delle Scienze.* In 4.° *Modena*, 1805 *presso la Società Tipografica.* Vi sta in fronte l' estratto degli atti della Società Italiana, il quale prova come fosse premiata ad unanimità di suffragi , benchè segreti. Fu ristampata dal Piatti in Firenze nell' anno stesso; ed anche nel tomo 3.° del *Nuovo Giorn. dei Letterati* in Pisa; nel vol. 1.° delle *Effemeridi chim. med.* ( se-

---

*sidiantes susurros. Melius omnibus , quam singulis creditur. Singuli enim decipere , et decipi possunt; nemo omnes , neminem omnes fefellerunt.* ( Plin. Paneg. Trai. Cap. 62. ) Non ignoro che il cel. Thomas soleva dire , la lode essere il più delle volte un commercio di menzogne stabilito per convenzione e pel bisogno che ha l' uno di piacere all' altro. Ma quando questa lode, io soggiungo, si comparte a carriera finita , ad un illustre estinto da cui o per cui nulla può sperare il lodatore, e del quale è censore l' universo e giudice la posterità, allora, se non piglio erro, non è che l' omaggio offerto dall' ammirazione alla virtù , e si converte in uno de' più grandi trovati umani. Tale fu la mia ventura nello assumere il tristissimo incarico che mi fu imposto.

mestre II. facciata 133. e segg.ti, e 201. e segg.); ed in Milano con note di G. P. presso Agnello Nobile, in 8.° Ne tenne ricordo in Padova il *Giorn. della Lett. Ital.* alla facc. 184. del t. 8.°, e fu tradotta in Francese con note da *Lafont Gouzi Paris*, 1807. *in* 8.°

IV. *Riflessioni sulle febbri chiamate gialle e sui contagi in genere, Parma, presso Luigi Mussi*, 1805, in 8.° Ne fu inserito con molti encomj un estratto del dottor Giuli nell' accennato *Nuovo Giorn.* di Pisa (t. 4.°); uno nelle *Effem. chimico-med.* (semestre II. facc. 188. e sègg. del t. 2.° 1805): ed un altro critico nel vol. 2.° del *Giorn. della Nuova dott. Med. Ital. Bologna*, 1819. Un importante estratto ne diede pure nella *Bibliothéque Médicale* (IV. Ann. N.° 41. T. XIV. e N.° 44. T. XV.) il medico Francese *G. B. Michel.* Nel 1808 se ne faceva una traduzione in Germania, come si scorge da una lettera del ch. professor Brera a Rubini del dì 31. Dicembre di quell' anno.

V. *Giornale della Società medico-chirurgica di Parma* Tomi XV in 8.° 1806-1816. Molte dissertazioni e storie di malattie egli inserì in questo giornale di cui fu uno de' tre compilatori ne' primi anni, ed il solo negli ultimi per la morte del Dott. Ambri, e per la partenza del Prof. Tommasini, come si disse alla nota 26.

Queste storie e dissertazioni hanno i titoli che seguono:

1.° *Storia di due zampilli di saliva che scaturivano al disotto della lingua.*

2.° *Storia dell' ottalmia che ha regnato epidemica in Parma dal mese di Febbrajo sino all' Aprile del* 1806, *e pensieri sulla stessa.*

3.° *Storia d' un vizio organico intestinale terminato in un morbo nero.*

Sono inserite nel 1.° vol. a facce 26, 93, e 161, e segg.

4.° *Breve cenno dei tentativi sino ad ora istituiti sull' efficacia del Carbone vegetabile polverizzato nelle ulceri di varia natura.*

5.° *Caso di febbre perniciosa accompagnata da sintomi sempre varianti.*

Vedi il 2.° vol. a f. 3. e 126.

6.° *Storia d' una febbre intermittente accompagnata da un ordine insolito di sintomi.*

Vedi il t.° 3.° f. 8.

7.° *Sulla forza meràvigliosa colla quale si espande il tessuto cellulare.*

8.° *Storie di tumori ai popliti.*

9.° *Sulla diagnosi della vera scelotirbe di Galeno.*

10.° *Storia di una singolare affezione del Diaframma.*

Vedi il t.° 4.° a f. 14, 95, 205. e 241.

11.° *Storia d' una febbre anomala accompagnata da un forte fetore di cipolla.*

12.° *Storia di due malattie trattate coll' applicazione esterna dell' Arsenico.*

Vedi il t.° 5.° a f. 161, e 255.

13.° *Storia d' un tumor addominale.*

Vedi il t.° 6.° a f. 65.

14. *Sull' utilità dell' infusione della digitale purpurea L. nel trattamento delle emorroidi.*

15.° *Storia di alcune straordinarie produzioni organiche.*

V. il t.° 7.° f. 95. e 241.

16.° *Sull' ipotesi Darwiniana che riguarda il senso proprio del calore.*

V. il t.° 8.° f. 17.

17.° *Storia di un' Atresia, e d' una Mestruazione straordinaria.*

V. il t.° 10.° f. 36.

18.° *Storia d' una Dispnea consensuale, con alcune riflessioni sulla teoria dell' Irritazione.*

V. il t.° 11.° f. 113.

19.° *Osservazioni in risposta al prof. Termanini sopra l' accennata storia di un' Atresia.*

Queste osservazioni sono precedute da una lettera del

prof. Termanini di Bologna al prof. Tommasini sopra la storia medesima V. il t.° 12.° f. 94. Di questo giornale fu fatta menzione a f. 748. col.ª 1.ª del *Moniteur universel* 1813, ed ivi erroneamente si disse, che si pubblicava da *quattro* anni, mentre doveasi dire da *sette* circa. Molte lodi vi si diedero a Rubini.

Nella *Notice histor. et bibliogr. des journaux publiés au prémier Janvier* 1821, che sta in fronte al t.° 3.° delle *Tablettes universelles* pubblicate dal Sig. Gouriet, a f. XXVII, si parla del nostro Giornale come se fosse ancora continuato, mentre l' ultimo tomo uscì nell' anno 1816. nè comparve poscia proseguimento di sorta.

VI. *Pensieri sulla varia origine e natura de' corpi calcolosi che vengono talvolta espulsi dal tubo gastrico.* Questa dissertazione è inserita nel t.° 14.° Parte 2. delle *Mem. della Soc. Ital. delle Scienze*, a f. 59. (1809), e trovasi anche a parte colla data di Verona 1808 in 4.° È lodata a f. 25. del t.° 40. del *Giorn. dell' Ital Lett.* (Padova).

VII. *Storia di un Diabete guarito coll' oppio, e riflessioni sulla forma e sull' indole di questa malattia.* È inserita nel t.° 15.° Parte II. delle predette *Memorie* a f. 20, e se ne diede un estratto a f. 28 e segg. nel t. 31.° del detto *Giorn. dell' Ital. Lett.*

VIII. *Riflessioni sulla malattia comunemente denominata* Crup. *Parma, presso Giuseppe Paganino*, 1813, in 8.° È assai lodata a f. 1275 del *Giornale Italiano*, *Milano* 1813, e a f. 523 del t.° 4.° del *Giorn. di Medicina pratica* del professore Brera.

IX. *Discours sur les progrès de la vaccine dans le Département du Taro en* 1812. Questo breve ma eloquente discorso è inserito a f. 9. e segg. della *Notice sur les progrès de la vaccine dans le Départ. du Taro ecc. Parme* 1813, in 8.° *chez Joseph Paganino.*

X. *Storia di una singolare metastasi.*

V. a f. 254 e 367 del t.° 1.° della *Biblioteca Italiana* 1816.

Di quest' opuscolo si tirarono esemplari a parte colla data *Milano coi tipi di Giovanni Pirotta*, 1816, *in* 8.° N. B. Ciò che leggesi a f. 134. e 135 racchiuso tra virgolette „ nel 2.° vol. della Biblioteca stessa intorno all' opera del Dott. Bucellati *L'essenza delle malattie* ecc., è di Rubini.

XI. Le considerazioni sulla febbre petecchiale che dominava in Parma sul principio del 1817, inserite nel N.° 12.° della Gazzetta di questa città nell' anno stesso, e l' Istruzione pel metodo curativo di questa febbre, pubblicata nel Marzo dell' anno medesimo, sono suo lavoro. E le une e l' altra furono ristampate a f. 311 e segg. del vol. 11.° del *Giorn. di Medicina pratica del Cav. V. L. Brera.*

XII. *Storia di una pulsazione a' precordj da causa insolita.* Sta a f. 235 e segg. del Tomo 12.° della Bibl. Ital. Se ne tirarono esemplari a parte colle note tipografiche, *Milano, presso la direzione del Giornale*, in 8.° Ne diede poscia un estratto il Dott. Carlo Speranza negli *Annali Universali di Medicina del Dott. Omodei* N.° 30. 1819.

## OPERE INEDITE

### CHE STANNO PRESSO GLI EREDI.

I. *Lezioni di Clinica Medica.*

Ne lasciò dieci fascicoli co' titoli seguenti

1.° *Febbri;*
2.° *Infiammazioni;*
3.° *Miasmi;*
4.° *Esantemi;*
5.° *Profluvj;*
6.° *Neurosi;*
7.° *Cachessie;*
8.° *Impetigini;*

9.° *Locali;*

10.° *Ritenzioni.*

A questi dieci fascicoli se ne possono aggiugnere due altri intitolati, *Triplice base della medicina*, ed *Introduzioni*, le quali sono appunto le introduzioni a ciascun anno del corso di Clinica.

Sarebbe d' uopo che un valente medico ponesse queste cose in ordine rigoroso, e collocasse a' loro luoghi le note che su fogli o frusti di carta volanti vi si trovano per entro; indi ne facesse bello e desideratissimo dono alle scienze mediche.

Le Lezioni, come si notò, vanno anche manuscritte per le mani di parecchi suoi discepoli.

II. *De studiorum commodis atque periculis Oratio.*

Questa è l' Orazione inaugurale ch' egli recitò al cospetto dell' Università il dì 16. Novembre per l' apertura degli studj dell' anno 1795. Trattò questo argomento, come il dovea un medico, vale a dire limitossi a parlare de' vantaggi e de' pericoli fisici che vanno di compagnia con una vita studiosa; e con eloquenti ed eruditi modi diede per essa eccellenti precetti.

III. *Orazioni per Lauree*. Dodici se ne rinvennero fra le sue carte.

IV. *Regolamento della Società Medico-Chirurgica Parmense*.

V. *Discours sur les progrès de la vaccine dans le Dépar-tement du Taro*. Questi discorsi precedettero quello che è posto sopra fra le opere a stampa, al N.° IX, e spettano agli anni 1810. e 1811.

VI. *Del Tifo*. Quest' opera che fu da lui incominciata allorchè incrudeliva fra noi il Tifo del 1817, è ben lungi dall' essere compita. Egli non ne lasciò che uno sbozzo di ventinove facce, oltre molte note che sembrano ad essa concernenti. Accennerò la divisione degli articoli di queste poche pagine.

Art. 1.° Il Tifo non è febbre nervosa.
Art. 2.° — — non è febbre putrida.
Art. 3.° — — non è febbre gastrica.
Art. 4.° — — non è febbre verminosa.
Art. 5.° — — non è febbre petecchiale.
Art, 6.° — — non è febbre.
Art. 7.° — — non è flogosi encefalica.

In altri frammenti dell' opera stessa dice:

Il tifo non è ipostenico.
— — non è iperstenico.

VII. *Storia di uno strano sonno morboso*. Sarà inserita nella *Biblioteca Italiana*.

VIII. *Storia di malattie*. È un Vol. in foglio piccolo dove sono scritte di sua mano le storie delle principali malattie curate da lui.

---

IX. *Penelope*. Cantata di pochi versi.
*Sonetti*. Ne ho veduti due o tre fra le sue carte.





ANTONIO MANZONI

# VITA ED ELOGIO

DI ANTONIO MANZONI CHIRURGO VERONESE

CHE FU DEI QUARANTA

DELLA SOCIETÀ ITALIANA DELLE SCIENZE

Scritti

DAL DOTTOR GIOVAMBATISTA ZOPPI PROTOMEDICO MUNICIPALE

DELLA REGIA CITTÀ DI VERONA

Medico dell'Imperial Regio Liceo Convitto, Accademico Filarmonico

*Ricevuto adì* 11. *Settembre* 1820.

„ *Ipsa quidem virtus sibimet pulcherrima merces.* „

*Sil. Italic.*

Se il vivo e giusto desiderio di ricordare a tutti qual' uomo si fosse Antonio Manzoni, e 'l piacere di acquistargli per questa via ammiratori delle virtù sue, e del valore, non mi rincorasse alcun poco lo spirito abbattuto dalla perdita di un tale, e tanto amico; non io certamente avrei lena bastevole da mettermi a recitare la storia de' fatti di lui, ed alcune cose toccare a laude de' molti suoi meriti; tanto è il rammarico, ch' io sento all' anima, vieppiù accresciuto dalla pietà e dalle querele della comune nostra patria, della filosofica, e medica Repubblica, e direi quasi, dell' Italia tutta, che lo aveva in somma reverenza ed estimazione. Ma chi son io, che narri le laudi di lui, e le sue virtudi, e le maravigliose cose, che fece? Per certo confesso, ch' io non sono oratore, nè sentomi sufficiente a portare, ed a fornir quest' uffizio. E nondimeno sento che del tutto non posso tacere: tante ragioni

ho io, che a parlar mi confortano. L' amicizia lungamente, e strettamente avuta con Lui mi mostra troppo debito questo cambio da rendere alla sua memoria: mi sprona anche il santo dovere di riconoscenza per la sapientissima Società Italiana delle scienze, che me volle in fra tutti, per la scarsezza dello ingegno, per le soverchie occupazioni, per la non troppo ferma salute, il meno adatto di tutti, eleggere a laudatore di un suo sì benemerito sozio. Finalmente mi spinge a parlare il medesimo dolor mio, che certamente avrà uno sfogo dilettevole, e dolce nel ricordar le azioni onorevoli del caro amico, e così farlo quasi rivivere a consolazion mia, e di tanti amici, che mi domandano questo dovere. Il che tuttavia prego mi vaglia a scusare la povertà del mio dire, che animo addolorato mal può servire agli adornamenti dell' eloquenza: a me si conviene il verso di Dante:

„ Parlare, e lagrimar m' udrete insieme „

Antonio fu figliuolo di Carlo Manzoni, e di Bona Ragazzoni: nacque in Verona il dì quindici del mese di Settembre l' anno mille settecenquarantacinque. Essendo Antonio ancora fanciullo fu messo alla scuola di un precettore che non era troppo felice nell' insegnare; il perchè, sebbene di sottile intendimento, egli nulla imparò. Fu poi mandato al Castello d' Illasi del contado di Verona al Prete Paolo Morini, esperto grammatico, e peritissimo delle Latine lettere, il quale, come l' ebbe conosciuto di sottile intendimento, e di buono ingegno fornito, vi si mise attorno con sì spezial cura, e così bene lo ammaestrò, che riuscì in breve tempo meraviglioso scolare. Antonio intanto per li primi elementi ch' egli aveva avuti buoni in fanciullezza, tornato in Verona, fu de' più valenti scolari, che usassero alle scuole de' Padri della compagnia di Gesù, e divenne perfetto nella grammatica, nella rettorica, nella dialettica, e nella Filosofia. E venne in tanta estimazione presso que' Padri, che avrebbero voluto, che egli si mettesse nella lor Società. Ma Antonio non sentivasi punto da

Dio chiamato a vita d' ordine religioso. Non era suo padre troppo agiato di beni di fortuna: e pertanto fu d' uopo ad Antonio prendere un'arte, che lo fornisse del bisognevole per la vita. E sentendosi meglio, che ad altra, acconcio alle liberali discipline, infra queste elesse la chirurgia: e fu buona ventura, come piacque a Dio, per la patria sua, conciossiachè le abbisognasse in quel tempo un assai perito maestro in un' arte cotanto necessaria, e sì salutare.

Ebbe maestro Antonio Monterossi padre di Pietro, chirurgo, Dottore in medicina, peritissimo nella Notomia, che pubblicamente insegnò nel civico Spedale, coetaneo del nostro Manzoni, al quale visse sempre legato in somma intrinsechezza d' amor cordiale, come a tal uomo, che lo valeva; essendo fornito di molta dottrina, d' aurei costumi, di purissima religione. Egli morì otto giorni dopo di Lui; quasi come non volesse più sopravvivere al caro amico. Era allora Antonio Monterossi chirurgo dello Spedal militare, e di quello degli illegittimi, onde ebbe il Manzoni via assai facile, e presta d' impratichirsi dell' arte sua; anzi, essendo egli fin da giovane assai religioso, godea sommamente, notando quanto maravigliosa, e bella fosse l' opera di Dio, e della natura nel corpo dell' uomo; ammaestrando così insieme se stesso in ciò, che meglio desiderava; ed altresì crescendo nella conoscenza di Dio; di che lo studio suo senza intervallo era sempre nella notomia. E fu certamente mirabile cosa, ch' egli da per se solo, paragonando con lungo studio ciò, che nei libri dei maestri dell' arte leggeva, con quello più evidente, che notava cogli occhi medesimi sui morti corpi, ne riuscisse tanto perfetto anatomico, quanto egli fu. Nel che egli potè ben soddisfare al suo ardentissimo desiderio di imparar sempre più: conciossiacchè egli soleva starsi fitto nel suo scrittojo tutto solo gli interi giorni meditando, e contemplando le azioni, e le relazioni, che hanno le viscere le une colle altre, e i muscoli, e i nervi, e i vasi maggiori coi minori, e tutto ciò alla fine, che nell'umano corpo maraviglio-

samente si contiene, e gli uffizi, e le forze di ciascuna sua parte, e 'l collegamento di tutte insieme. Fatta conserva così nella mente di queste tanto utili cognizioni dell' arte sua, si conventò in chirurgia, secondo la costumanza di que' tempi, nell' Università di Padova il giorno dieci Marzo dell' anno millesettecensessantacinque, essendo egli d' anni venti non ancora compiuti; nella quale Università alcun tempo rimanendosi, si proccacciò molti dotti amici, fra i quali il grande anatomico Giovambatista Morgagni, del quale sopra tutti fu altissimo ammiratore.

Addiviene le più delle volte, che ottenuta da alcuni la laurea dottorale, giurata da quel dì innanzi grande inimicizia ai libri, ed allo studio, passano gli interi giorni oziando, e raccogliendo le novelle delle Città ed anche sedendo *pro tribunali* a tener ragione de' fatti altrui, e spezialmente a riveder i conti, e lacerar la fama de' vecchi medici, e de' chirurghi

„ Giudicando da lunge mille miglia
„ Con la veduta corta d' una spanna;

ma non fu del novero di questi scioperati il Manzoni, che desideroso di se stesso sempre più alluminare, ebbe quasi ad intisichire sui libri, acquistandosi per fino ( colpa le troppo continuate meditazioni sui libri ) una molesta infermitade ipocondriaca. S' era di già innamorato dell' opera del Morgagni *de causis, et sedibus morborum per anatomen indagatis*, e tutta se la converse in sugo, ed in sangue, adoperandosi con tutto lo studio di Lui segnitare, e la sua dottrina imitare. E s' esercitava del pari negli altri classici autori, ed antichi, e moderni, de' quali fu pratichissimo, e indi ne trasse con lunghi studj quelle moltiplici cognizioni, ch' egli sparse abbondevolmente nelle opere sue. Nè leggeva egli correndo le cose, nè tutto alla cieca non credeva ciò, che trovava negli scrittori, ben sapendo il detto aureo di Cicerone nel libro primo dell' oratore, che „ omnium bo-
„ narum artium scriptores, et doctores, et legendi, et per-

„ volutandi, et exercitationis causa laudandi, interpretandi, „ corrigendi, vituperandi, refellendi; disputandumque de „ omni re in contrarias partes, et quidquid erit in quaque „ re, quod probabile videri possit, eliciendum, atque di- „ cendum „ e perciò leggeva meditando, e con giusta logica, e sagace critica distingueva il vero grano dal loglio.

Fu il dotto medico, e critico Lionardo Targa, che prima lo conoscesse, e conciossiachè non fosse troppo cortese, nè prodigo altrui di lodi, nulladimeno senza fine lo commendava. Divulgatasi per le lodi di un tanto uomo la fama del nuovo chirurgo Manzoni, fu fatto richiedere da illustri, e gentili uomini a curare implicate malattie, e tanto chiaramente, e per eccellenza le conobbe, le distinse, e le curò, che ne tornò sommo vantaggio agli infermi, ed a lui grandissimo onore; e non andò guari di tempo, che quasi niuna grave malattia venisse curata, ch' egli non fosse dimandato di suo consiglio. Ascoltava la leggenda spiegata dal chirurgo, che avea presa la cura, con grande raccoglimento, e talvolta con somma pacienza. Rispondeva, ragionando sopra i veri principii, senza recar noja all' ammalato con inutili teorie (come che troppo bene l' avesse potuto fare, per accattar fama di dotto), appoggiato alle dritte osservazioni, e senza alcuno spirito di sistema, volendo piuttosto, che ogni ammalato, secondo le circostanze, fosse un sistema per Lui. Parlava il suo volgare idioma, senza nuovi, o strani vocaboli, reconditi, e misteriosi, e vie meno con Greci, o Arabici, o Barbari

„ Nomi da fare spiritare i cani, „

come scrive in una lettera il Redi, ed era in cotal guisa da tutti inteso, ed ammirato. Non dava troppo il guasto agli alberelli degli Speziali; anzi usava medicine semplici, come richiede la semplice natura, e le più adatte a questa, bene ammaestrato dal dotto Bacone di Verulamio, che „ non fin- „ gendum, aut excogitandum, sed inveniendum quid natu- „ ra faciat, aut ferat. „ Non voleva soprastare, o signoreg-

giare in alcuno, bastando lui d' aver detto il suo giudicio, secondo che migliore il reputava, e più utile al suo cliente.

Accadde, che venuto essendo di là da monti in Verona un maestro di chirurgia, riputato, secondo l'usanza, da tutti sovr' ogni altro medico; e volendo questi tagliare lo scirro in una mammella di una nobilissima Matrona; e mandato prima per il Manzoni, che si voleva nuovo consiglio da lui (come che prima veduta l' aveva); egli disaminate tutte le buone ragioni prò e contra giudicò, che non fosse da venire al taglio; asseverando con qualche maggior fondamento di sicurezza, che l'inferma morrebbe innanzi tempo, anzi assai tosto. Ma elle furono parole: perchè si volle far l' operazione: sembrava quasi essa condotta a buon fine di guarigione, quando rincrudita la piaga, e fatta gangrena, rapidamente la donna morì. Quell' oltramontano ebbe poscia in tanto onore il Manzoni, che scontrandolo per via gli diceva ogni volta reverentemente: „ Vous etez l' Hyppocrate de Vérone .„

Nè perciò si levava mai in superbia per arroganza contro alcuno; solo fu rigido contro l' ignorante per zelo dell' arte sua, mal sofferendo, che un medico, ed un chirurgo fosse tanto poco alluminato di ciò, che necessariamente doveva sapere: il che senza infamia della profession sua, e danno altrui, alcuna volta gravissimo, non potea intervenire. Fu assaissimo cauto, e prudente ne' suoi pronostici; e bensì confortava l' ammalato, e lo ricreava con racconti, e motti piacevoli, secondo che gli dava una sua certa natural prontezza, e vivacità, in guisa, ch' era da tutti desiderato; conciossiachè i suoi ammalati fossero per avventura più amici di Lui, che clienti.

E si potrebbe dire da taluno, Lui non essere stato del tutto grande maestro dell' arte sua, perchè non esercitò la mano operatrice nel taglio, che porta il mal della pietra, e nello illuminare i ciechi dove si pucte. Ma è da por mente, che ciò non fu per sua colpa, ma della fortuna soltanto. Imperocchè non essendo il padre suo troppo agiato di beni di

fortuna, non potè farlo ammaestrare nelle Università ; e non v' era in Verona chi a ciò sapesse addestargli la mano. Ma nella teoria di queste parti della chirurgia egli fu per altro così sperto e profondo ( avendone acquistato grandi cognizioni collo studio, e coll' osservazione ) che ne' dubbi casi si voleva consiglio da Lui , ed il suo consiglio veniva, le più delle volte , ricevuto sopra quello degli altri .

Fu sommo nell' arte dell' allevare i parti, la quale pubblicamente , per tant' anni nel civico Spedale insegnò , leggendo nello incominciamento delle scuole ogni anno un dottissimo ragionamento sopra questa materia, ad udire il quale accorrevano tutti i sapienti della Città con grandissimo diletto , ed ammirazione . Quest' arte , si può dire , che fu tutta sua , perchè ne sapeva di questa tanto eccellentemente , quant' altri mai . Ed avvegnachè nell' esercizio di questa ogni maggior circonspezione sia necessaria , e v' abbisogni un sottilissimo accorgimento , e prudenza , egli l' ebbe oltramodo grandissima : conciossiachè nelle più dubbie , e pericolose circostanze , prima di mettere la mano all' opera , ne chiedeva consiglio a quelli, che avevano maggior voce di sapienza in siffatto mestiere . Ed infatti quante mogli non salvò egli ai mariti ! Quanti portati alle tenere madri ! Era assai dolce cosa il sentirsi dir di frequente , e nelle strade, e nelle case, e ne' palagi, o dalle madri, o da fanciulletti da Lui serbati in vita : *io vivo per voi* . Non è nulladimeno , ch' io creda , nè voglia dire per istrabocchevole affezion d' amicizia, tutte le operazioni essere a lui con felicissimo esito riuscite. Imperocchè , se pur in alcuna cosa o la mano, o l' arte gli fosse fallita ; ovvero la gravezza del male vinti avesse gli argomenti della sua provvidenza , non è da far meraviglia di una cosa ch' a tutti gli umani provvedimenti è comune ; nè ciò punto scema del merito , e valor suo : perchè messe a comparazione di alcune poche tutte le altre tante, le quali l' opera sua condusse ad esito felicissimo , non potrebbe questo difetto di nulla oscurare la fama di Lui. Oltradichè , dov' è

quell' uomo, che in un' arte di congiettura, nella quale tante s' incontrano circostanze imprevvedute, e talora non superabili ostacoli, possa dire: io non ho errato? I Moriceau, i Levret, i Smellié, i Stein, i Deventer, i Baudaloque, i Brüninghausen, non furono sempre avventuratissimi. Fu per altro grande teorico, e sommo pratico in quest' arte, il cui consiglio, e l' opera desidererà lungamente Verona.

Quantunque di tutte le arti, dica Esiodo, che „ figulus figulo invidet, faber fabro „ sembra nulladimeno esser l' invidia un morbo, che più s' appicca a coloro che sono professori di una liberal disciplina. Fu il Manzoni invidiato da molti, ma egli non portò invidia ad alcuno, nè cziandio ne' primi suoi anni di gioventù; anzi se qualche collega suo bene riusciva in qualche chirurgica faccenda, ne godeva egli, e lo commendava; e come colui, che aveva grande zelo dell' arte, metteva a suo prò anche le osservazioni altrui. Fu sempre nimico de' litigi, e perciò non ne moveva giammai; e se tentato avesse alcuno per avventura d' affrontarlo, facendo mostra di non intenderlo, o di non curarsene, rintuzzava così generosamente l'orgoglio dell'affrontatore. Ebbe in grande reverenza i suoi maggiori, e se pur s' accorgeva, ch' escissero dalla dritta via, non li corregeva però con impudenza; solamente, aspettando il buon destro, diceva soltanto ciò, ch' a lui paresse meglio da fare. Nè fu mai suo costume di cacciarsi di soppiatto nelle case dei malati, che fossero in cura ad altro medico: anzi montava in ira, s' altri fatto l' avesse con disonore dell' arte sua. Frequentavano di buon mattino, e dopo il mezzo giorno la casa del Manzoni e poveri, e doviziosi; e ognuno ch' a lui veniva per qualunque bisogno, partivasene consolato; perchè dolce, e benigno in parlare, sebbene stanco talora, ed affaticato, con grande amorevlezza tutti ascoltava, ed a tutti porgeva refrigerio. Ed è pur meraviglia, che a lui tanto di tempo sopravvanzasse da studiare, e meditare, e stendere poi sulla carta a

però degli altri, quello, che aveva colle sue osservazioni raccolto, il che nella seconda parte si farà manifesto.

Ippocrate, Paolo da Egina, Aezio, Dodoneo, Foresti, Amato Lusitano, Sidenamio, Beninvieni, Benevoli, Lorenzo Nannoni, Morgagni, e tant' altri, per non farne leggenda di tutti, i quali in ogni secolo, dopo Ippocrate fiorirono, si diedero tutti, lasciato il sottilizzare, all' osservazione in opera di medicina. Se i medici tutti, ad imitazione di questi grand' uomini, invece di secondare il soverchio ingegno, e la fantasia ne' ritrovamenti di fantastici sistemi: se invece di cangiare il nome ai vocaboli confermati dalla venerata antichità: se invece di ricercare dalla terra, dagli animali, dai vegetabili specifici medicamenti, e venenosi, che si vanno, quanto la moda istessa, cangiando: se invece di attizzare il fuoco alle pentole, ed ai chimici crogiuoli, avessero servato, io dico, i medici modo, e temperamento in queste ricerche; e perfettamente ammaestrati nella Notomia, nella Fisiologia, nella Patologia, e nelle altre parti, che più da vicino risguardano la medicina, o che alla medicina medesima appartengono, si fossero invece dati più addentro nell' osservazione, e tenuto avessero ben attenta la mente, e lo intelletto alla disamina dei fenomeni proprii di ciascheduna malattia, bene, e rettamente distinguendo l' une, dall' altre, avrebbe la medicina fatto già quei progressi nel conoscere le malattie, nel prognosticarne, e nel curarle, che non ha fino ad ora fatto, come avrebbe dovuto.

A questa sentenza, quanto necessaria, altrettanto utile, s' attenne Antonio Manzoni; il quale rifrenando la mente dalle sottigliezze, e sofisticherie, a che poteva tirarlo l' ingegno suo fervido, e sottile, abbracciando per altro tutti quei nuovi, e semplici ritrovamenti, che più gli sembravano dettati dalla dritta ragione, in particolar modo però si diede alle osservazioni. E, oltre di ciò, istrutto com' era delle cose tutte Anatomiche, Fisiologiche, e Patologiche, stava egli sempre osservando i naturali andamenti, e quelle vie, che

tenea la natura ottima curatrice dei mali, ed egli pure questa sulle sue orme si mettea seguitando; e se per avventura veduto avesse, ch' ella fosse uscita di strada, cercava in dolce modo di darle la volta, e condurla colà donde da prima s' era sviata. Con questo mezzo arrivò egli ad un tal grado di scienza, e di cognizioni dell' arte sua, che potè francamente dire con Baglivio: „ vera dico, expertus dico, sancteque affirmo. „ Ma per poterlo dire a tutta ragione

„ Multa tulit, fecitque . . . . sudavit, et alsit „

Non perdonò mai a se stesso nel visitare a un bisogno due, e le tre volte il giorno i suoi malati, sofferendo con somma pacienza i cocenti raggi del Sole, e le dirotte pioggie, e colle gelate nevi il rigidissimo freddo, e di giorno, e di notte. Quanti volumi dei maestri dell' arte non isvolse egli ( singolarmente ne' difficili casi, e pericolosi, che gli venivano a mano ) per ritrovare quelle verità, o per farne comparazione di ciò, ch' egli veduto aveva, e che al presente caso gli fossero potute giovare! Ma il suo primo consigliere e maestro era il Principe degli Anatomici Giovambatista Morgagni, col quale le intere notti vegghiava, allora che dubbio gli fosse nato in qualche più malagevole scontro dell' arte sua; e non v' era linea in tutte le opere sue, di cui non ne sapesse render ragione. Se l' eruditissime storie del Morgagni, e i suoi ricordi anatomici, se le sue lettere, se i suoi consigli, se i suoi tutti ragionamenti dirlo potessero; direbbono non essere passato giorno, in cui non istesse il Manzoni con loro a maturo consiglio, ed in ragionati colloquj. Quante veglie, quante meditazioni, quante sagge critiche riflessioni! Era anche profondo in quello, che scritto avevano gli antichi maestri, dalle quali fonti bevuto avea tanta scienza il Morgagni medesimo. Ne confrontava i testi, ne notava le circostanze, metteva a comparazione storia a storia, interpretava quello, che sembrava meno chiaro, nè lasciava mai di leggere, se prima non avesse chiaramente compreso ciò, che stava riposto nella mente istessa del dotto

scrittore. Se saputo avesse, che un qualche nuovo libro, anche d'Oltramonti, fosse uscito di chiara fama di scienza, e di dottrina, impaziente scriveva per possederlo, nè s'acquetava giammai, se letto non l'avesse, e ben meditato. Era sua cura l'averne molti e antichi, e moderni, e latini, ed italiani, e francesi, ma non per lasciarli polverosi a vana pompa di una copiosa libreria, ma per leggerli, ruminarli, e nell'anima ricevere le loro dottrine, e trarne quindi le utili cognizioni, che in quella sua arte così varia, ed oscura gli sarebbono potute venire al bisogno. Col fino suo intendimento, colla sottile perspicacia, colla saggia critica, scelse sempre le gemme sparse quà e là in quegli aurei codici; delle quali opportunamente, ed utilmente arricchiva le sue dottrine ne' ragionamenti, ovver ne' consigli, e se ne giovava nell'esercizio dell'arte. Ora collo studio, col lungo esercizio, colle moltiplici sezioni anatomiche, avendo fatta una bastevole raccolta d'osservazioni patologiche, volle farne utilità la prima volta alla medica Repubblica, dandole alla luce l'anno mille settecento novantacinque colle stampe degli eredi Moroni, denominate da Lui: *Observationes pathologicae auctore Antonio Manzoni*.

Questo libro è scritto in lingua latina, ed elegantemente scritto, sì che si puote emulare al latino Ippocrate, e far arrossire insieme alcuni medici, che bruttano vituperevolmente le loro ricette di sconci solecismi. La proprietà dello stile storico, la sceltezza, e purità de' vocaboli, il bel costrutto, e la precisione unitamente alla chiarezza, ci fanno conoscere, che fu peritissimo della lingua del secolo d'Augusto. Compartì in dodici capitoli questo libro, e diede il nome al primo *dei vizii dell'orinare*. Questo capitolo è compreso in dieci osservazioni; ed avvegnachè tutte utilissime, nulladimeno quella è in ispezieltà di Maria Galvani, perchè fa chiaro conoscere, quanto i medici, e sapienti, ed addottrinati si possino ingannare nell'arte nostra, e come talora guardar non si possano dagli artificii de' malati medesimi.

Dalla comparazione delle tre storie del dottissimo Medico Giovanni Verardo Zeviani, e dalla storia anatomica del Manzoni, ben si conosce ad evidenza, che in Maria Galvani si sono ingannati per trenta tre anni i medici, avendo essa (qual che fosse la cagione, ed il fine) data loro cagion di credere, ch' ella non orinasse: quando d' altra parte la storia anatomica del Manzoni dimostra chiaramente, che agli organi, che separavano, contenevano, e cacciavano le orine, nulla mancava, sicchè la Galvani, come qualunque altra, il dovette aver fatto. Quanta utilità non reca alle mediche osservazioni questa accurata disamina, che fece il Manzoni sul cadavere della Galvani! Non crederebbero forse ora anche i men creduli medici (se non era il Manzoni a trarli di quest' inganno) che Maria Galvani non avesse eseguito questa funzione corporale per trenta tre anni? e che il vomito avesse sopperito a questo naturale bisogno? E taluno già l' ha creduto, come se ne lagna il Manzoni in una storia del secondo libro delle sue osservazioni patologiche; e l' ha creduto sopra le storie del Zeviani; il quale per un certo natural suo amore ad ogni cosa, che avesse del maraviglioso, se l' ha creduta; ed inserita per ben due volte nel suo libro *del Flato*, e negli atti della Società Italiana delle Scienze, tacendo il nome dell' incisore anatomico; ma conoscerà questi d' essere stato ingannato, se leggerà la storia veridica dell'?incisore Manzoni. Questa donna fantastica, e sempre misteriosa, voleva pure anch' essa, che le fosse creduto, facendo (come pare) maravigliosa pompa di questa stravagante sua malattia applaudendo a se stessa (per femminil leggerezza) d'aver grande nominanza sulle storie mediche, e negli atti delle Accademie; come accadde a me stesso, sebbene assai giovane medico, con grande meraviglia d' ascoltare, quantunque io non l' abbia creduto.

Appresso il detto Capitolo viene il secondo delle malattie delle ossa, ed è tutto in altre cinque osservazioni diviso. È fra l' altre utilissima quella, che per quanto si ricordi, non fu osservata da nessun dotto scrittore, lo staccamento, o al-

lontanamento ( *diastasi* detto dai Greci ) delle vertebre del collo ; malattia così rara , che non viddero mai i grandi indagatori anatomici Petit, Lieuteaud, Morgagni. Fa alcune sagge riflessioni nella seconda di questo capitolo sopra questo fatto; ch' essendo stato rachitico un Cavaliere in sua fanciullezza, e credutone ben guarito, gli si rinnovò la malattia nella vecchiaja ; e gli fu trovata colla sezione Anatomica ( oltre quel più, che si legge nella storia ) la sostanza delle coste , che rassomigliava al tessuto carnoso, come quello, che le più volte si ritrova nelle ossa rese molli dei rachitici ; lo che puote alluminare i medici , quanto in alcune croniche malattie importi il ricercare diligentemente dei morbi sofferti nella puerizia, e nella fanciullezza.

Seguitano tre altre osservazioni nei capitoli terzo, e quarto; la prima d' uno sformato tumore tagliato nel collo sollecitamente , secondo l' avviso del Morgagni : le due seconde della felicissima guarigione dell' idrocele radicalmente curato; essendo già noto, che senza questa cura radicale, è l' idrocele malattia non così facile a curarsi. Tre sono le osservazioni del quinto capitolo, che appartengono ai vizii della testa. Le due prime dimostrano quanto astruse sieno le cause delle *Cefalee*, contando la storia di due scirri del cervello. Merita la terza d' essere ben considerata, che descrive la ghiandola pituitaria degenerata in polipo scirroso nel cervello del dottor di legge Vincenzo Cristani . Chi detto avrebbe mai, che dopo tanta serie di malori ; che dopo una lunga cura, e tormentosa ; che dopo il consiglio di tanti medici, resa si fosse poliposa la ghiandola pituitaria ? e che tanti morbi della medesima specie si fossero nella testa ingenerati ? Occulta sarebbe ancora la causa di questa malattia , se l' accurato indagatore, ed osservatore Manzoni colla sezione anatomica conosciuta non l' avesse, e descritta per aggiungere cognizioni alle mediche storie , e nel medesimo tempo metter in guardia i medici, che sospettino in sì fatte malattie di somiglianti cagioni. E da questa osservazione vengano una volta alla

fine ammaestrati i medici, ed i chirurghi, che nelle ostinatissime croniche malattie, da causa incognita provegnenti, non si dee così molestare, e indurre soverchia nausea all' infermo con replicati moltiplici argomenti interni, ed esterni; essendosi veduto nella storia di Vincenzo Cristani, che il male correva a maggior precipizio, quanto più si voleva curare. Avessi io pure forza bastevole per gridare ad alta voce contro que' medici, e chirurghi, che senza il necessario avvedimento, per volersi mostrare grandi conoscitori in medicina, danno il sacco, in qualunque malattia, alle spezierie, e sfracellano lo stomaco de' malati, " senza osservare, dice la facoltà di medicina in Parigi nel codice Farmaceutico scritto in lingua latina, e reso volgare da due valent' uomini Veronesi, le „ leggi dell' animale Economia, delle quali ogni uomo sag- „ gio dee studiare i fenomeni; ed alle quali opporsi, o dis- „ prezzarle è certo indizio di giovanile presunzione, o di „ vituperevole ignoranza. „

Negli altri sette capitoli si leggono quindici bellissime osservazioni, e sulla gravidanza, e sul parto male avventurato, sulla sifilide, sur una ferita del collo, sul taglio del cancro, sulla lesione della voce, e sopra varie altre strane malattie, cose tutte maravigliose, ed utilissime. La dottrina, l'erudizione, le sagge riflessioni, la chiarezza, la critica prudente, e ginsta, pruovano ad evidenza quanto dotto, e grande osservatore fosse Antonio Manzoni nell' arte sua, e che le ben fondate osservazioni in medicina sono quelle, che ponno soltanto formare il medico, ed il chirurgo utile a' suoi simili.

Furono le osservazioni patologiche del nostro Manzoni accolte da tutti i dotti con grande ammirazione, e sommo diletto; e ne diedero certa testimonianza le lettere onorevolissime a lui scritte da tutti gli amici suoi, e da altri scienziati uomini, che vollero ( presa cagione da ciò ) legarsi in amicizia con Lui. Si dica, per nominarne alcuno, del dotto anatomico, e fisiologo M. A. Leopoldo Caldani col nipote suo Floriano, ch' emula alla gloria del Zio; di Camillo Bo-

nioli, di Pietro Sograffi, di Vincenzo Malacarne amicissimo suo; dei due Giovambatista Paletta, e Monteggia, di Sonsy, e del grande Antonio Scarpa, del quale il solo nome è una grandissima laude. A questi riputatissimi amici, collo scorrere del tempo, altri se ne aggiunsero; ed Aglietti Consigliere, Valeriano Brera, Fanzago, Bonato, Ruggieri, Professori tutti dottissimi dell' arte nostra salutare.

Crebbe intanto sì altamente, ed onorevolmente la fama di Lui, che non v' avea forastiere o medico, o chirurgo d' alta nominanza, che non volesse visitarlo; nè altresì giungeva nella Città illustre personaggio, o nobile uomo, e gentile, ch' essendo afflitto da qualche infermitade, non volesse consiglio da Lui; e molti in vero studio da dottissimi Professori mandati, per averne da Lui le più adatte medicine a' lor mali. Così bene intanto per ogni dove si sparge fama del suo sapere, e della sua perizia, che per mezzo di lettere da Città, e castelli anche lontani, egli era richiesto del suo consiglio. E tale, e tanta era la comune buona opinione di Lui, che a Verona veniva per fino portata invidia, che possedesse un uomo di tanto ingegno, e di tanta, e sì grande dottrina. Al qual proposito è da notare ( cosa al Manzoni orrevolissima ) ch' egli avvegnachè montato in sì fatta estimazione, non negò mai, nè altrui fece caro dell' opera sua; conducendosi nelle ville, e ne' castelli del contado, da chiunque, povero, o dovizioso, fosse egli chiamato. Nè sdegnò mai d' ammaestrare i giovani, com' altri fanno, o per invidia, o per alterezza: anzi gli instruiva cortesemente, con loro comunicando tutte le cognizioni da sè con tanto studio, e con sì lunga sperienza acquistate: e gli allettava allo studio, ed allo esercitarsi, desiderando che dopo di Lui rimanessero degli uomini bene addottrinati, che potessero essere utili alla patria, come infatti sono alcuni, che assai onorano il nome suo.

Verona che tanto lo apprezzava, conobbe ancora quanto egli meritasse, e per fargliene quella migliore testimo-

nianza, che per Lei si poteva, lo scrisse con onorevole elezione, ed accolse fra i sozi dell' Accademia d' agricoltura, arti, e commercio. Fu eletto parecchie volte dalla medesima a dare giudizio di opere all' Accademia presentate, e ad attribuire il premio a quelle, che ne fossero reputate fra l' altre le più meritevoli. Fece alcuni estratti di memorie, ma con somma sottigliezza, ed avvedutezza, in particolar maniera di quella sulla stravagante malattia di Aristide Terdecimano di Vincenzo Malacarne; che pubblicamente recitò il Manzoni ai sozi dell' Accademia con somma soddisfazione loro ed applauso. Quanto non fu egli utile altresì nelle bisogna dell' ufficio di Sanità! diede sempre utilissimi consigli, e prestò la sua mano ancora nelle sezioni de' cadaveri più difficili, ed importanti. Fu sommamente prudente nel giudicare de' sospetti di veleno altrui dato, seguendo le traccie di Paolo Zacchia, e del Morgagni, come fu egualmente in tante altre gelosissime materie, che importavano la buona fama altrui, e il decoro d' onorate famiglie.

E quantunque per le soverchie fatiche, per i disagi delle stagioni, e per lo continuo studio talvolta infermasse o di febbre catarrale, o d' altro malore; sì grandemente era reputato il suo consiglio, che da mattina a sera era circondato il suo letto da clienti, che ne chiedevano soccorso; a' quali non ricusò mai di cortesemente rispondere, e di sovvenire. Quante volte, non essendo anche ben riavuto da qualche suo male, usciva di casa così ammalazzato per essere all' ajuto delle donne nel pericolo, o ne' dolori del parto, o per qualche altro caso sì grave, che il suo consiglio, o l' opera ci fosse bisognata! Se dai familiari suoi, che tanto lo amavano, veniva talora rimproverato, o confortato di risparmiarsi, rispondeva; *Chi cerca di me, sta peggio di me*. Ricoverata affatto la sanità, ritornava di tratto alle usate faccende, ai suoi studii, alle sue osservazioni, che sopra ogn' altra cosa gli stavano a cuore. Ed infatti nell' anno mille ottocento nove diede di queste alla luce in lingua latina il secondo libro colle

medesime stampe degli Eredi Moroni, e vi pose il titolo: *Antonii Manzoni Veronensis Observationum Pathologicarum liber alter.* È questo Libro dedicato al celebre Antonio Scarpa Professore in Pavia, come cosa di sua ragione; conciossiachè landando egli sommamente le prime, assai caldamente l' avesse confortato, di apparecchiarne, e pubblicarne dell' altre. Lo stimolo di questo grande maestro è una lode di tal fatta pel nostro Manzoni, che maggiore non potrebbesi da nessuno desiderar, nè sperare.

Sono divise in quattordici capitoli, ne' quali si raccontano moltissime istorie di malattie, e d' incisioni anatomiche. A me non sarà possibile il descriverle tutte in questo breve, e semplice elogio, e porle in bella, e chiara mostra; ma se la mia narrazione è tronca, ed abbreviata, chi vorrà saperne più, legga in queste più pienamente, e conoscerà ben di leggeri, come sommo sia l' ingegno, quanta la perspicacia, e la diligenza nell' osservare, e la dirittura nel saggiamente conghietturare del nostro Autore. Ma per farne un qualche cenno, e per invitare altrui a leggere, e ad ammirare insieme le altre, dirò pure di una. Quanto è mai nuova quella del femore fesso da causa interna senza carie dell' osso! Ben s' intende dall' esattissima storia, quante abbia fatte indagini, e conghietture il Manzoni nel corso di questa malattia ( sì accuratamente da Lui dichiarata ); ma che l' incisione anatomica ha dimostrate non vere. Lo che pruova la difficoltà, e l' oscurità di quest' arte. Confessa egli ingenuamente, che non si può intendere, nè spiegare, come, e donde sia proceduto quel cotale vizio nell' osso. Due cause per altro ne sospetta con tutta prudenza; la prima, che il midollo del medesimo, ch' era fuori dello stato naturale, sia stato la primaria causa della fenditura dell' osso; e tanto più, perchè il periostio non era così sconformato da poterlo credere effetto di tale causa. La seconda, che il femore siasi così repentinamente rigonfiato, perchè la superior parte della scissura, che si fece nella parte anteriore del fe-

more, si aprisse novellamente, e che perciò la superiore estremità dell' anterior parte repentinamente, e dal restante osso siasi divisa, e così rigonfiata la carne. Resta, dic' egli, per altro ancora a trovare da qual veleno sia stato guasto, e corrotto il midollo, e per questa corruzione conseguitata tanta fessura nell' osso, nel quale, diligentemente esaminato, non si ritrovò alcun vizio manifesto. Volle darne ancora un' effigie dell' osso medesimo nel fine dell' opera; conciossiachè nessuno, per quanto siasi ricercato, descrisse mai una storia della fenditura dell' osso senza carie, e senza gonfiezza del medesimo. Sono degne poi di singolare ammirazione, e laude le osservazioni sopra il cancro dei testicoli, dell' intestino colon, quella della spina dorsale, delle ossa rotte, dei veleni, della gravidanza fatta nella tuba; ed in fine tutte le altre che mossero avidamente altrui ad essere lette, ed ammirate. E tanto piacquero all' amico suo Vincenzo Malacarne Professore nell' Università di Padova, che volle renderle volgari con alcuni bellissimi, e chiarissimi aforismi colà stampati.

Sono queste, come tutte l'altre mediche osservazioni, di grande utilità a' medici, ed ai chirurghi, i quali ben disaminando i fenomeni in simili malattie, possono con quest' ajuto facilmente e conoscerle, e pronosticarne, e quando si possa, ancora curarle con somma lode. Ma per ciò ottenere, ci bisogna studio, ed amore dell' arte, e non sordido interesse; ci vuol desiderio, e studio d' ammaestrarsi per essere utili agli altri, e guardarsi ben dall' invidia, e dalla superbia, e dalla misera presunzione figlia dell' ignoranza, di signoreggiare sopra gli altri. Non è forse premio bastevole per un onorato medico, e chirurgo il fare delle utili scoperte, e l'erudire la mente di utilissime cognizioni? Ed oltre a questo il piacere d' aver fatto profitto, e salvati i nostri simili da gravissimi mali? Con sì fatti mezzi ottenne il Manzoni sopra gli altri il primato, senza vituperevolmente cercarlo; e non vi fu che qualche ignorante, aizzato dalle vo-

ci di qualche scioperato, e vil laudatore, ch' abbia tentato Lui di rapirglielo, collo spacciare nuove teorie, nuove parole, nuovi sistemi, nuovi medicamenti, dispregiando per fino le osservazioni, riputandole vane, ed inutili. Ma sono trascorsi, la mercè di Dio, que' tempi della medica impostura, e della cieca credulità ai cerretani.

La virtù, ed il merito non ponno lungamente starsene nascosti, ed obbliati. Il dottissimo consesso dei quaranta della Società Italiana delle Scienze, conosce, per mio avviso, chi li possede in sommo grado: imperocchè non dà luogo fra' suoi sozj, se non a quelli, che sono veramente dotti, e scienziati. E ne fanno pruova tutti quelli grandi uomini, chiarissimi per i loro scritti, che furono scelti in quel novero per lo passato, e quelli che presentemente onorano la Società medesima. Fu adunque da questa conosciuta la virtù del Manzoni, e insieme onorata; perchè fra tanti viventi illustri Italiani, fu prescelto una volta quel vero scienziato a compierne il novero. Qual gloria non fu allora per il Manzoni, e per la Patria nostra? Verona debbe essere gratissima a quest' uomo, che le accrebbe ancora un tanto pregio, d'avere un suo figlio scritto in quella nobilissima Società. Per rispondere ben tosto a sì caro onore, ed insieme al dovere, mandò il Manzoni alla medesima una Memoria, che fu inserita negli atti di Lei nel Tomo decimosettimo.

Fu questa chiamata, *Alcune pratiche considerazioni sull' inchiodamento della testa del feto nella pelvi, e sull' uso della Forcipe*: Essa merita ogni lode per la sua utilità. Premesse alcune generali considerazioni sull' invenzione della Forcipe dell' immortale Andrea Levret, fra le molte, che dopo quella, da' moderni furon trovate, sembra al Manzoni, che sia di molto maggior pregio, quella di Pean, ch' è una correzione della Forcipe del Levret; e tanto più che il celebre Baudeloque l' ha sempre usata in fra tutte nella sua pratica, aggiungendo per altro, che viene assaissimo pregiata eziandio quella del Professore in Gottinga Osiander. De-

sidera che sieno fatte esperienze su quella ancora del Professore Assalini, *che sembra*, dice egli, *un composto tratto dalle correzioni delle Forcipi di Osiander, di Thenance, e di Brünninghausen ultimamente corretta*. Il Manzoni scelse per altro nella sua pratica quella di Brünninghausen di prima correzione, come quella, ch' è a lui riuscita troppo meglio della Forcipe del Levret, in quaranta operazioni, ch' egli ha eseguite. Racconta di alcuni casi con questo strumento così felicemente succeduti d' inchiodamento della testa del feto nella pelvi, e ne spiega il modo con sottil distinzione. Non niega, ingenuo come sempre fu, in alcuni avergli detto male la prova: ma, descrittane la storia, rimette al giudicio de' Lettori il diffinire, se ciò sia avvenuto per difetto dello stromento, se per imperizia dell' operatore, o per altre vere cagioni da pochi conosciute, e ch' egli ha tentato in questa Memoria di dimostrare ad evidenza, e che ognuno leggendo potrà facilmente discernere, e secondo esse giudicare. Rammenta ancora altri casi poco fortunati, e successi o per tardanza, o per imperizia, o per poco studio, ed ignoranza de' chirurghi.

Egli ammaestra in seguito utilissimamente i chirurghi delle condizioni, che si richieggono per dover venire all' uso della Forcipe, e come, e quando acconciamente si debba usare, e come si possano superare gli ostacoli tutti, che pur troppo s' incontrano; e fa menzione in appresso di nove casi dove gli tornò vana questa pruova; conciossiachè si fosse presentata la testa all' ingresso del bacino in trista posizione. Conchiude alla fine, che quantunque si narrino molti esempi di operazioni eseguite felicemente, egli è però da pigliar in ognuna grande sospetto, che o per poca conoscenza dell' arte, o per poca esattezza nell' osservare siasi creduto ciò, che non era; avendo forse procacciato cotali operatori, con esagerare la difficoltà, d' acquistarsi molta lode in un non difficile sperimento. Da questi saggi ammaestramenti ne tornino più cauti gli operatori, e non osino di porsi a tanto cimen-

to, se forniti non sieno di quelle tutte cognizioni, che si richieggono in un'opera di tanto risico, ed importanza; e ne dimandino prima l'altrui consiglio; e si rammentino quelli che la reputano cosa da poco, che per la loro ignoranza, ed ardire, o temerità, cimenterebbono barbaramente la vita delle madri, e de' portati.

„ . . . quaeque ipse miserrima vidi;
„ Quamquam animus meminisse horret, luctuque refugit.

Non è meno utile l'altra Memoria, che ha inserito nel Tomo decimo ottavo della stessa Società Italiana delle Scienze, cui diede questo titolo: *Considerazioni sugli aneurismi. Storia, e guarigione di un aneurisma venereo.* Si conosce anche in queste la molta scienza, che possedeva delle malattie organiche, e quanta utilità apportino le incisioni anatomiche sui cadaveri. Che se il fatto alcun tempo dopo mostrò non essere perfettamente guarita dell'aneurisma quella persona di cui egli scrisse la storia, si sappia, che allora per qualche tempo ne dava vista per forma, da poter ingannare un maestro di quella fatta il quale, se oggi, per lo ben nostro vivesse, indubitatamente il confesserebbe egli medesimo, rivocando il suo detto, tanto s'era il Manzoni mostrato sempre più amico del vero, che di se medesimo, e delle proprie opinioni.

Fra gli infiniti volumi scritti da' medici, e da chirurghi su tutte le malattie, mancava ancora un compiuto trattato della malattia del cancro dell'utero. Questa terribile malattia fu niente, o poco conosciuta dagli antichi. Se ne vede in essi appena una qualche traccia; e perciò fa d'uopo il dire, o che fosse in que' tempi un male rarissimo, o che per mancanza di cognizioni *ostetricie* poco da loro si conoscesse. Ne scrissero i primi Aezio, e Paolo con molta aggiustatezza, e poi per alcuni secoli se ne tacque. Puzos, ed Astruc ne dissero il più, che poterono, ma tutti e due imperfettamente, e con poca esattezza. Quindi veggendo la necessità, che fosse più conosciuto, e governato al possibile questo crude-

lissimo morbo, l' Imperial Regia Accademia Gioseffina di Vienna pubblicò un Tema, proponendone un largo premio a chi meglio in un ragionamento ne avesse scritto. Prevenuto aveva il Manzoni il saggio divisamento di quest' Accademia, conoscendone egli pure la necessità, ed aveva già quasi compiuta una dissertazione sul cancro dell' utero in lingua volgare; che poscia mandò, ripulita che l' ebbe, a quel dotto consesso. Ma il Manzoni non avea ben posto mente alle condizioni aggiunte al Tema; cioè, che doveva la dissertazione essere scritta in lingua latina, ed anche la mandò tardi; onde gli fu rimandata con un' amplissima lettera, che gli fa sommissimo onore mostrandogli grande dispiacenza di non poterla accettare, come quella, che meglio dell' altre parlava nella proposta malattia. Egli adunque la fece pubblica colle stampe degli Eredi Moroni l' anno mille ottocento undici in Verona, e la diede in dono all' amicissimo suo Vincenzo Malacarne Professore nell' Università di Padova.

Di questo Ragionamento sarebbono a dire di molte cose, e di grandi, per farlo conoscere altrui, e per dimostrare eziandio la dottrina, e le cognizioni, che aveva il Manzoni in sì fatta malattia; ma dovendomi io contenere ne' termini di un semplice estratto, ne dirò nulladimeno il meglio, e più brevemente, che per me si potrà, reputandomi dover fare altrui gratissima cosa, e rendere sommo onore a Lui, che tanto perfettamente ne scrisse.

Dimostrato, ch' ebbe il Manzoni, nulla, o poco avere scritto gli antichi di questa malattia, e qualche cosa, ma imperfettamente, i moderni; ed altri essersi data la briga di applicarvi venenosi medicamenti per distruggerlo; senza esporre la storia, e le cause di sì orribile morbo, estimà necessario di farsi un' idea chiara, e giusta dell' utero, e della forma sua, e postura nello stato naturale, per poterlo poi riconoscere morboso, e quanto importi la pratica manuale dell' esplorazione. Ora per rendere agevole la cognizione di tale malattia, descrive fisiologicamente la struttura dell' ute-

ro, e la relazione di questo colle altre parti del corpo per mezzo de' nervi, de' quali è fornito abbondevolmente, com' altresì di vasi arteriosi, venosi, e linfatici. Ciò premesso sagacemente ricerca quali parti dell' utero vadano più soggette al cancro; ed è suo avviso per la lunga pratica ( accordandosi col Monteggia, e coll' Osiander ) che ne siano l' orificio, ed il collo; avvegnachè il Morgagni, ed altri siano in questo parere, che ne vada soggetto più frequentemente anche il corpo dell' utero istesso; avendolo essi osservato nell' interna sua cavità talvolta corroso da alcuna ulcera maligna, o ridotto in scirro tutto esso corpo dell' utero; lo che sembra sia avvenuto, dice il Manzoni, per effetto di veleno; che l' osservazione anatomica ha dimostrato propagarsi non solo al corpo dell' utero, ma alle trombe eziandio del Falloppio, all' ovaje, a tutti i legamenti, al retto intestino, ed al collo della vescica. Non niega per altro, che siensi trovati tumori duri, e voluminosi nell' utero delle donne, ma dice, non seguitarne perciò, che fossero cancri legittimi; imperocchè durarono molti, e molti anni senza nocumento veruno; e s' avvalora questa opinione da un caso di una donna, a cui s' è trovato nell' incisione anatomica un grosso tumore proveniente dal fondo dell' utero, ch' ella s' ebbe per lo spazio di sedici anni; e d' alcuni altri casi ancora, che fanno pruova esservi dei tumori, che s' assomigliano ai cancri, ma che per le circostanze bene esaminate dal perito patologo, ed anatomico pure non sono; ma che possono tirare in errore, come hanno fatto dottissimi medici, ed anatomici, i quali hanno giudicato taluna donna viziata di un tumore nell' utero; quando il mentito male non era poi, che l' effetto di un isterismo, o di riscaldamento, o d' altro malore non canceroso, o maligno. Possono in oltre essere ingannati i meno accorti, ed attenti, per la somiglianza di alcuni segni col cancro, quando l' utero venga tratto fuori dalla natural sua posizione, che chiamasi *antiversione*, e *retroversione* dell' utero, la quale nella sua pratica il Manzoni non ebbe a

conoscere se non se imperfetta. Nè lo scolamento continuo di copioso umore sanioso, e fetente dalla vagina è sempre segno certo di maligna piaga dell' utero, come lo pruova con un taglio anatomico, che fece in una donna, e lo dimostra ancora colla patologia, e coll' autorità di Giovanni Astruc nel libro dei mali delle donne; e quindi saggiamente conchiude, ch' è assai raro il cancro del corpo dell' utero; e che l' utero istesso soggetto a tanti altri malori di un genere diverso dal cancro, puote ingannare chi venga talvolta condotto a giudicarne non dalla vera pratica, ma dall' arbitraria immaginazione.

Taccio per amore di brevità di narrare alcune sagge riflessioni le quali da chi vorrà si potranno leggere per agio, e ricorderò piuttosto i segni diligentemente, e con tutta esattezza raccolti dal Manzoni per conoscere, quando sia la donna viziata di questa tristissima malattia. Nel suo incominciamento è assai difficile a conoscere il cancro; ed altrettanto è difficile a curarsi, allora che si è già reso manifesto; ed è in errore chi crede, ch' esso incominci al modo degli altri cancri. La scrupolosa esplorazione ha fatto conoscere, che incomincia le più volte da un bitorzoletto, o porro assai minore di una lente, che viene sul collo dell' utero, che non è nè duro, nè aspro, nè scuro: il quale crescendo, ora rapidamente, ora lentamente, abbraccia tutto il collo istesso in forma d' anello; ed arrivato a certa grandezza, offendendo invade l' orificio dell' utero, che a poco a poco s' apre, e si allarga, ed il suo orlo diviene aspro, ed ineguale, dolente al tocco, e che altresì toccato manda sangue da qualche punto. Nel suo principio non trattiene, nè altera il corso dei mestrui, che si vanno poi sconciando in seguito, e ne nascono talvolta perdite di sangue strabocchevoli. In alcune donne, e più frequentemente, s' indura l' orificio, ed il collo dell' utero s' ingrossa, si fa bernoccoluto, si riconcentra, come fa il cappezzolo, nel cancro delle mammelle: le quali alterazioni morbifere recano alla donna una sensibi-

le molestia verso l'ano, e sembra ad essa patir frequente bisogno di scaricare il ventre; il che tuttavia facendo, non ne sente verun giovamento.

Giunte le donne al compimento del periodo de' loro mestrui, veggon nulladimeno a stillare dalla vagina alcune gocciole sanguigne, le quali però sono meschiate ad un umore sanioso, lo che è sempre d' infelice e tristo augurio. Questo fenomeno per altro non è sempre costante, perchè non lo vide in tre donne il Manzoni, ed in un' altra il Morgagni. Sono questi i segni primaticci, e più difficili a far conoscere il cancro dell' utero; e gli altri che ne vanno succedendo, come i dolori acutissimi, la febbre etica, il dimagrimento del corpo, e la consunzione, il reumatismo artritico, la diarrea colliquativa, la sanie che scola continuamente, sono ben facili d' essere conosciuti dal chirurgo il più zotico, ed ignorante. Narra a questo termine il Manzoni la storia di un cancro dell' utero, che non compiè, come negli altri, l' ordinario suo corso, quantunque avesse a manifestarsi incominciato coi soliti fenomeni di questa malattia: ma l' incisione anatomica fatta alla presenza di molti spettatori, di medici, e di chirurghi ha dimostrato, che troppo era tale: l' utero canceroso fu conservato dal Manzoni, e fatto delineare in rame, e riposto nel fine del suo ragionamento; e ben lo fece a ragione, perchè si voleva mantenere, che la malattia di questa donna non fosse il cancro dell' utero; e per erudire insieme i meno pratici, che suole questo morbo in diverse forme ingenerarsi, e con diverso modo manifestare se stesso, e con diverso ordine il suo andamento continuare.

Dimostrati i fenomeni, che ponno insegnare, come si conosca l' utero canceroso nel suo principio, nei progressi, e nella fine; disamina egli le cause che ponno ingenerarlo; e con prudente critica ne rifiuta parecchie: come, esempligrazia, ch' esso venga dalla cessazione de' sangni mestrui; provando col celebre Quesnay, pochissime essere quelle don-

ne, che vadano soggette a questo male per quella ragione, ed in quel periodo; e che maggiore è il novero di quelle, che per altre cagioni quivi addotte ne sono assalite; e che ne sono egualmente di quelle, che non hanno ancora compiuto questo termine; e le cittadine più ancora, che le donne di villa, nelle quali il caso avviene rarissimo, sebbene compiano queste, come le altre il periodo de' loro sangui mestrui. Riconosce intanto per vera causa l' artritide, ed il reumatismo cagionati dall' impedita insensibile traspirazione, la quale causa molto più s' accresce dalla pessima costumanza di non coprire le membra, le mammelle, ed il dorso; affrontandosi queste spartane eziandio con gli stridori del rigido verno: vizio abbominevole introdotto nelle colte persone, ch' espongono il corpo loro all' incostanza delle stagioni, perchè così porta la moda, o piuttosto l' ambizione a cui sacrificano l'onore e la pudicizia. Altre cause poi egli accenna, e fra queste l' abbominevole strumento da provocare l' aborto; le ammacature, o per l' estrazione delle secondine, o fatte dai pessarii, come crede il Morgagni, e talvolta ancora le injezioni troppo astringenti per sopprimere i fiori bianchi; e la sifilide, avvegnachè per questa ne succeda assai di rado.

Esposte così le cause, che l' una o l' altra possono ingenerare gli infarcimenti, e gli ingorghi maligni alla bocca, od al collo della matrice, egli ricerca l' indole, e la natura di quest' umor velenoso; ma nulla più di questo si può sapere, se non se, esser lui di natura distruggitrice, ed indomabile. La sola varietà di tante opinioni di tanti dotti indagatori, che ne scrissero poco concordemente, dimostra, che non s' è ancora dato sicuro giudizio sull' indole di codesto veleno. E fuvvi chi disse, essere questa materia d' acida natura, e chi d' alcalina, ed altri composta d' acido, e d' alcalino; e dissero gli antichi, che fosse atra bile effervescente, e degenerata nell' umor melancolico, e si tenne questa opinione da Aezio, fino a Boerave. Non è avviso al Manzoni, che sia questo male ereditario, e adduce delle bel-

le conghietture, e ragioni per comprovarlo, e move eziandio la quistione, se sia contagioso, o no. Egli mostra dubitare, ch' egli lo possa essere assolutamente; ma dice, che per altro questo veleno da chicchessia assorbito, può contaminare almeno gli umori, e communicare altrui delle triste disposizioni, che sentano della natura di questo male; e sembra, che con alcuni fatti voglia provarlo, che per amore di brevità lascio di raccontare.

Chi è atto a conoscere un male, dice Ippocrate, è atto a guarirlo, e si vuole intendere di quelli, che sono sanabili. Chi era più atto a conoscere il cancro dell' utero dopo tante osservazioni, che fosse il Manzoni; e pure quanti ne ha egli guarito? Nessuno. Misera condizione dell' arte nostra! v' ha certe malattie, le quali sebbene per i loro fenomeni sieno distinte, e conosciute dagli accurati osservatori, non ponno tuttavia essere guarite, perchè non se ne conosce l'indole, e la natura del veleno, che le produce, e le ingenera, e perchè nè eziandio per abbattimento, non venne mai guarito dall'arte. Tale è il cancro dell' utero. Fu per altro sempre cercato di medicarlo, e di guarirlo: e moltiplici sono i rimedii, che ne furono usati, ma tutti in vano; come accuratamente tutti gli ricorda il Manzoni.

Gli antichi, dice egli, secondo la loro teoria, purgavano la bile; successe a questo metodo quello d' usare il muriato mercuriale dolce; a questo, quello delle fregagioni mercuriali sempre inutili, e perniziose: e se talvolta furono cantate le lodi di questo rimedio, dice il Manzoni col Richter, non dover essere stati veri scirri, o cancri occulti legittimi quelli, che furono risanati. È in oltre commendatissimo il cauterio alle cosce; il salasso una volta il mese, da altri due volte l' anno, e v' ha chi vuole, che l' inferma si purghi soventi volte; ma conchiude col Morgagni, che questi presidii dell' arte sono valevoli talvolta a ritardare il progresso del male, ma non giammai ad estinguerlo perfettamente.

Delle malattie, delle quali non è conosciuta la causa, si

ricercano, e si propongono sempre nuovi rimedii, e specifici, come nella tosse convulsiva, e nelle febbri terzane, ed in più altri malori; e così i medici si diedero tutti a ricercare nuovi medicamenti pel cancro dell'utero; e (quello ch'è maraviglioso assai) ad immaginarne per fino di quelli, che valessero a guarire il cancro manifesto, ed esulcerato, sebbene, per la lunga esperienza si sappia, che con qualsivoglia rimedio non sia stato guarito mai alcuno, che fosse vero cancro. Lambergen vuole, che si possa guarire coll'Atropa bella donna del Linneo (*solanum furiosum*, *solanum lethale* del Clusio, e del Lobelio); e Vandermond lo crede rimedio almeno calmante, e palliativo. Sauvages mette per sicuro rimedio l'estratto delle foglie del jusquiamo bianco (*hiosciamus albus*); e Gilibert afferma d'aver conosciuto un chirurgo, che guariva le ulcere cancerose coll'estratto d'uva d'America (*phitolacca decendra Linnei*); ed Enrico Langio coi semi di finocchio acquatico (*phelandrium aquaticum Linnei*). Diedero altri la palma al gaz acido carbonico, altri al succo di Carota (*Daucus carota*), altri alla vermicolare (*sedum acre Linnei*) altri alla jacea officinale (*herba trinitas* degli Italiani, *Viola tricolor* del Linneo), altri all'acido prussico per injezione, ed altri finalmente all'estratto della grande cicuta (*conium maculatum Linnei*). Ma com'è, dice il Manzoni, che questi rimedii, creduti tanto salutari, messi alla pruova non rispondano mai dell'effetto promesso? Anzi tornino le più volte dannosi? Conchiude, o che le storie non furono sincere, o che non furono veri cancri quelli, che si vollero guariti con questi millantati argomenti.

Ma se dunque o sono inutili, o dannosi tutti questi rimedii, si potrebbe, ricerca il Manzoni, fare il taglio del cancro dell'utero, come di quello delle poppe? Astruc decise negativamente. Ma il dotto Monteggia lo propose, e saviamente disse, che il tentarlo sarebbe *azzardoso*, *e dubbioso*, di tagliare, cioè, traversalmente tutta la bocca dell'utero canceroso sporgente nella vagina. L'opera del Monteggia fu tra

dotta in lingua Tedesca, e pubblicata in Vienna l' anno mille ottocento e quattro. Intanto si seppe in Italia per mezzo di un estratto di una memoria letta alla Reale Società di Gottinga, che il celebre Professore Osiander aveva tagliati nove uteri cancerosi, com' ei dice, felicemente. La cosa è assai maravigliosa, dice il Manzoni, ma non sembra, che l' abbiano creduta i dotti chirurghi Tedeschi; perchè dalla Imperiale e Reale Accademia Gioseffina di Vienna in Austria non sarebbe stato pubblicato il Tema sull' argomento del cancro, e sulla incisione del medesimo, se le guarigioni fatte dal Signor Osiander con questo mezzo fossero state credute. Confessa egli stesso il Monteggia gli esiti poco felici, ch' ebbero le legature del collo dell' utero. Ora non negando il Manzoni la possibilità dell' operazione, annovera i pericoli, le circostanze, le circospezioni che si dovrebbero avere; e converrebbe, che dottissimi uomini facessero severa critica alle nove operazioni del Signor Osiander, che promise di far le pubbliche colle stampe, ma che per altro tuttavia vengono desiderate.

Se dunque, non v' ha rimedio certo, se non è ancora deciso, che si possa tentare la recisione del collo dell' utero canceroso, or che si deve dunque fare? Si calmino almeno, dice il Manzoni, i crudeli fenomeni, e tormentosi di questo morbo. L' oppio, e le sue preparazioni introdotte nell' ano riescono a tal uopo utilissime, e particolarmente se si usino in sulla sera per calmare nelle ore notturne gli acutissimi dolori. Alle *menorragie*, che vanno succedendo a queste infelici addolorate, torna utile la posca fredda ricevuta nei pannolini applicati al ventre, e talvolta ancora il ghiaccio involto nei medesimi; e se per avventura succedano le sincopi, è molto confortativa l' acqua spiritosa di cannella. Si tengano lavate, e nette le parti imbrattate di fetida sanie, che cola dall' utero, colle decozioni di crusca, di foglie di malva stillate a pioggia lentamente per non irritarle. Con questo metodo dal Manzoni sperimentato è scemato il dolore all' inferme, e

possono più lungamente vivere, e meno tormentate. Egli conchiude alla fine il suo ragionamento col vivo desiderio, che con un metodo di vita più morigerato, onesto, e semplice possino le donne campare da una sì crudel malattia resasi oggimmai troppo frequente. E se il suo ragionamento non puote riuscire a salvare le donne viziate dal cancro dell' utero, sarà utilissimo almeno, perchè ne possino evitare le cause; e per questa via ne vengano impediti, o suervati i crudeli effetti: ed altresì acciocchè i chirurghi possano più agevolmente conoscerlo, e pronosticarne con loro onore, senza mettere per mala giunta alla tortura quelle infelici, ponendo sossopra le Spezierie.

Un altro ragionamento aveva egli *scritto sulla deglutizione* per rendere chiare alcune idee del Morgagni, ed osservazioni, e manifestare insieme la sua opinione che voleva render pubblica colle stampe; ma divenuto già debile, ed infievolito dalle lunghe fatiche, e dagli assidui studii; anzi di tratto in tratto infermando con minaccia di emiplegia, non ha potuto far questa utilità alla patria, ed al mondo, nè soddisfare al suo desiderio. Ed infatti nel mese di Settembre dell' anno ottocento diciannove fu colto nuovamente da febbre, e stupore della persona; dai quali fenomeni dopo alcuni giorni alquanto riavuto, dava le più belle speranze di vicina salute; ma il giorno undici del mese di Ottobre fu assalito da una febbre *carotica*, che nel giorno diciotto del mese istesso lo rapì alla desolata famiglia, e dolente, agli amici, alla patria, ed a tutta la medica Repubblica, che lo piange, e lo ricorderà mai sempre con sommo desiderio, e dolore.

Ora si vuol dire una qualche cosa della sua vita civile, e come sia stato ottimo padre di famiglia. Menò in moglie in età d' anni vent' otto Angela Bellavita di onesta famiglia Veronese, stata già moglie di Antonio Silvetti, cólla quale visse forse trenta sei anni senza litigi, ch' egli sommamente abborriva. Di lei ebbe varii figliuoli, de' quali sopravvissero

tre, Teresa, Luigi, e Francesco. Non risparmiò mai spesa veruna per civilmente, ed onestamente educarli; e scelse in particolar modo valenti precettori, che guidar li potessero per la via della virtù, e della dottrina. Di che non ebbe a pentirsi, perchè corrisposero questi collo studio ai desiderii ed alle speranze del padre, ed alla perizia, e diligenza de' loro instituttori.

Fu molto commendabile il Manzoni; imperocchè senza fondi paterni, ha potuto colla sola arte sua, e voluto fare ai suoi figliuoli quei benefizii, che l'onorato padre di famiglia cerca sempre di fare: lasciando loro un sufficiente patrimonio, nè già per questo usò in casa men che orrevole trattamento. Fu beneficentissimo co' fratelli suoi, e parenti; ma in particolar modo co' poverelli, essendo stato sempre liberale, e limosiniero. E posso io renderne testimonianza, meglio d' ogn' altro, perchè lo vidi, oltre al prestar l' opera gratuita con somma carità a' poveri infermi, a sovvenirli anche ne' loro bisogni generosamente; e ben mi ricorda ancora con somma tenerezza, che avendolo io chiamato a consiglio per una malattia di un vecchio assai povero, e da lui prima, e da me conosciuto ricco; e veggendo, ch' io secondo le mie forze cercava di soccorrerlo, volle con nobile gara dividere meco il merito della cura, e del sovvenimento. Non chiedeva mai la mercede dell' opere sue, se non venisse a lui offerta, nè la ricusava se troppo scarsa; nè essendogli frodata ingiustamente da alcuno, il citò mai in giudizio; e gli doleva, s' altri fatto l'avesse con disonore dell' arte sua. Era lepido ne' familiari discorsi, affabile, e manieroso; e sebbene (come porta l'arte nostra) egli si trovasse spesso a' pericolosi cimenti; congiunse però mai sempre colla piacevolezza un contegno sì onesto, e grave, che dando altrui sicurtà, non mettea però a risico l'altrui, nè la propria coscienza. Colle vergini innocenti, e colle pudiche matrone portavasi in modo, che la loro pudicizia, e l' onore ne rimaneva sempre sicuro. Di che tutti, e tutte aveano in lui piena fede, a lui ne' più teneri e gelosi fatti a sicurtà com-

mettendosi. Seppe con queste maniere, talvolta non conosciute, essere il dolce amico di tutte le famiglie, delle quali era segretario, e consigliere. Osservava lealmente il secreto in quelle cose massimamente, che risguardano la buona fama, e l'onore altrui, conservando in questa guisa la perfetta pace dei conjugati. Fu sempre perfetto Cristiano, e Cattolico; e singolarmente nelle passate procelle, nelle quali la fede di Lui si mantenne immobile nella santa Religione, e nella soda pietà, per forma, che di Lui nella sua patria non fu mai ombra di sinistro sospetto. Nell'ultimo tempo, che il più del giorno passava in casa, lesse con infinito piacere la vita di Gesù Cristo scritta dal suo amico Don Antonio Cesari. Finalmente nell'ultima malattia, che il teneva assopito, riscosso un poco; essendogli dal Confessore proposto di ricevere gli ultimi Sagramenti, mostrò col volto rasserenato non pur d'esserne contento, ma di desiderarlo eziandio: e li ricevette con animo tranquillo, e religioso, con edificazione, e consolazione della famiglia, e di tutti.

Amici ebbe molti, ed in ispezieltà i dotti, scienziati, e uomini di lettere della Città nostra; e per dirne alcuno, Lionardo Targa sommo medico, e grande critico dei libri di medicina di Aulo Cornelio Celso; Benedetto del Bene, che fu ancora suo condiscepolo, e s'amarono mai sempre teneramente; i Preti Luigi Girolamo Trevisani prefetto degli studj nel Seminario Vescovile, Antonio Cesari grande Filologo, Antonio Zamboni provveditore nell'Imperiale Regio Liceo convitto, Santi Fontana, Giovambatista Frisoni, Antonio Benoni ora Canonico Teologo in Mantova, e tanti altri, che tutti fanno onore a questa mia patria. Io pure fui nel novero di questi, avvegnachè non sia nè dotto, nè scienziato; ma convien dire che per la simiglianza dell'arte, e de' miei pensieri co' suoi m'abbia voluto così stretto a sè come fummo, per lo spazio di trent'anni, in tenera amicizia.

Ora, ecco fornito verso di te, dolce amico, il povero uffizio dell'amor mio, e della osservanza. Ed or di te che

mi resta? La tua pietà il tuo esempio, ed i tuoi benefizii. Che resta insieme agli altri? L'opere sue, e le azioni onorate. Voglia pur Dio, che la fiorente studiosa gioventù dell'arte nostra voglia specchiarsi in questo vivo modello, e seguire con passo sicuro le tracce del suo magistero; amandosi scambievolmente, fuggendo le discordie, ed i litigi, attendendo allo studio lunge dai partiti, e da' perniciosi sistemi, seguendo anzi le osservazioni, precipuo fondamento, e sicuro dell'arte nostra, con tutte le altre cose, che la possono render più utile a' prossimi nostri; mostrandosi aliena dal sozzo interesse; che se da tutti dee esser fuggito, 'vuol essere troppo più da' Professori di una liberal disciplina. Che se ciò mi verrà fatto; potrò in questi ultimi anni della misera vita mia lietamente cantare col nostro Cesari nel fine del suo Capitolo sopra il *Giuoco;*

Già 'l sessagesimo anno omai m' è corso,
Fra mille mali della vita acerba;
Pur dirò, lieti giorni aver trascorso,
Se a veder tanto bene il Ciel mi serba.



Briogn. Magnanini dep. Geom. Vincenz. dis. Gmf. Lasinio inc.

Paolo Ruffini Reggiano

Presidente della Società Italiana delle Scienze

# ELOGIO

## DEL PROFESSOR PAOLO RUFFINI

PRESIDENTE DELLA SOCIETÀ ITALIANA DELLE SCIENZE

SCRITTO DAL PROFESSORE

## GIUSEPPE BIANCHI

Un irresistibile sentimento mi trasporta non di rado alla tomba di Paolo Ruffini a ripensarvi in silenzio gli straordinarj pregi di quell' Anima, e a deplorarvi affannosamente l' irreparabil perdita che fecero, nel dipartirsi di lei dall' ingombro terreno, il Principe, la Patria, i Buoni, le Scienze. Ma la qualità stessa del soggetto mi rende ogni volta avvertito che a scemare il danno e il dolore il tributo non è opportuno di sterili fiori e di lagrime inutili; e che il solo alleviamento ritrovasi nel rivolgere a proprio e altrui profitto lo studio de' grandi esempii che lasciati per esso ci furono d' ogni egregio costume, di sapere e di virtù.

Salito io in questo luogo e fra questa pompa inaugurale, (*) non è quindi sì estranea l' impressione che in me destano e il sublime apparato della Religione, e l' adunamento festivo delle Scienze, e il titolo della solennità, e la presenza di tanto numero di Concittadini, che non sentasi il mio pensiero da secreta forza richiamato alla memoria dell' uomo illustre da morte, non ha guari, a noi rapito. E non ebb' ella un caro suo vanto in Ruffini la Religione; e non vennero

(*) Il presente Discorso venne pronunciato nella Chiesa di S. Carlo in Modena il 25 Novembre 1822. per la circostanza della solenne inaugurazione degli studii che suole ogni anno praticarsi dalla R. nostra Università.

per lui onorate splendidamente e promosse le scientifiche discipline; e superba non vedeasi la Real nostra Università in lui del proprio eminente decoro compiacersi, accennarlo in questo giorno sul meritato seggio distinto, il paragon, sua mercè, non temere de' Portici e Licei più rinomati; e non era Egli dell' intera Città l'amore e la delizia? Laonde se nobilissima costumanza prescrive d' inaugurar fra noi l' annuo riaprimento degli studii col pubblico Encomio di alcuno di quegl' Ingegni che lustro accrebbero ai fasti delle nostre scuole, della Patria nostra, del nome italiano, a chì spetta, per somma di argomenti, se non a Ruffini di ricevere l' omaggio della presente circostanza? Suonano ancora, è vero, per le maestose volte di questo medesimo Tempio le funebri lodi, che la feconda e robusta eloquenza di un mio Collega all'oggetto consacrò dell' universale compianto. (1) Nulla toglie contuttociò alle relazioni e allo scopo dell' odierno giocondo celebramento che s' aggiri l' orazion mia sulla stessa dolcissima ricordanza, poichè anzi il fervido altrui voto asseconda ed il mio.

Gli eccellenti uomini inoltre inesausta materia somministrano di ammirazione, quasi non altrimenti che nelle arti gentili i modelli sommi rivelano un sempre nuovo pascolo di peregrine dovizie e d' inesplicabil diletto a chi lungamente e con attenzion li considera. Se non che tanto maggiormente si debbe l' assidua contemplazione de' primi raccomandare, quanto le virtù dell' animo e le severe discipline avanzano di utilità il Genio delle Arti e della Immaginazione.

E il più non dissi finora; perocchè un tristo bisogno i tempi ne aggiunsero di riconoscere e di encomiar la vera Filosofia, dopo che il venerando nome di Filosofo, a grande sventura, usurparono uomini indegni ben anco di proferirlo. Meglio pertanto ravvisar la vera Filosofia e celebrarla meglio non si saprebbe di quello che i lineamenti del vero Filosofo con

---

(1) Orazione Funebre recitata dal Molto Rev. Profess. D. Giuseppe Baraldi | V. Memorie di Relig.,di Mor. e di Letterat. T. I. pag. 353 e seguenti.

fedeltà ritraendo; poichè se l' una forma dell' altro la gloria e l' ornamento, questi a vicenda ugual luce riflette su di quella. Tal è appunto, o Signori, il mio semplice divisamento, di mostrarvi nel nostro Paolo il vero Filosofo.

Quantunque mi avveggo d' esser io entrato in un arringo, cui que' medesimi paventano, che famigliare l' esercizio e gagliarda posseggono l' energia della facondia; nè ignoro che alla dignità e ampiezza dell' argomento troppo è l' ingegno mio inadeguato e la mia tenuità, meschina troppo, mal vi risponde. Ma deh! in tua benignità mi perdona, invidiabile Anima del Ruffini, e fia l' indulgente sguardo e il favorevol sorriso, che oggi Tu dall' alto mi doni, norma del pubblico grazioso compatimento che per me s' implora. Se al superior cenno più di buon grado mi soggettai ossequioso l' arduo incarico in assumere di tener oggi discorso fu, ten rammenta, per le umane insinuazioni, onde Tu ad altra lode mi eccitasti; nè il funesto dubbio allora mi sorse che poscia il sentimento della rapida tua partita il subjetto cangiato avrebbe di mie parole. Nell' osservanza del tuo consiglio l' ultimo atto a te professai di mia sommessione: Ora un serto, il miglior che per me si possa, intrecciandoti, l' ultimo pegno non intendo però di offerirti di quell' affetto devoto che indelebilmente nel cuore ho scolpito.

(PAOLO RUFFINI), Rettore di questa Real Università, Professore di Clinica medica, di medicina pratica e di matematica applicata, Presidente della Società Italiana delle Scienze, membro dell' Italico Istituto nella Sezione di Bologna e Socio di altre illustri Accademie, sortì i natali a Valentano nel Ducato di Castro il 23. di Settembre l' anno di nostra salute 1765. Con ogni cura educato da civili e integerrimi Genitori, il Dottor Basilio Reggiano e Francesca Maria Ippoliti Romana, fu Egli, sul compiersi del primo suo lustro di età, alla Patria condotto de' suoi maggiori, dove a considerarlo non m' intrattengo negli anni suoi immacolati di giovinezza. Vero è che il germe dell' ottima Filosofia sembrò in esso lui quasi l' età prevenire così nel tirocinio di gravi studi che nell' amore e

nell' esercizio di belle virtù e della pietà soprattutto; e vero è pure che rari sono gli esempii dell' ingenua Innocenza giovanile al profondo genio amabilmente congiunta delle austere scientifiche meditazioni, e che util cosa perciò sarebbe quello rarissimo produrre innanzi del nostro Paolo.

Ma oltrecchè debbe l' Orazion mia in breve tempo un vasto campo discorrere, piacemi le considerazioni a quel più maturo periodo serbare della preziosa vita del Ruffini, nel quale corrispondentemente alle umane facoltà nel massimo loro grado sviluppate il merito suol misurarsi e il titolo di Filosofo stabilirne, in quella guisa che la vivacità e chiarezza dell' astro diurno, comecchè vaga sia la rosea luce di suo crepuscolo, dallo sfolgorar si desume in suo meriggio. Nè v' abbia chi dubiti la illibatezza de' costumi potersi negli anni men verdi co' pregi dell' ingegno tanto mirabilmente conciliare; poichè anzi dall' accoppiamento migliore della sapienza, della virtù e della Religione il carattere formandosi della vera Filosofia, una sì felice consonanza nelle doti e nelle azioni a disvelar mi proposi dell' incomparabil nostro Concittadino.

Forza è infatti sentire con Tullio (2) la Filosofia essere lo studio della sapienza; mentre occupata la prima de' metodi a discuoprire acconcii la verità, nell' inviolabile possedimento della verità stessa la seconda si riposa. Che se delle Scienze quella della quantità scorgesi in sua natura di metodi eccellentemente suscettibile, i quali per vie dirette e con assoluta certezza allo scopo guidano le investigazioni, onde il nome antonomastico le conviene di Scienza, sarà pur di mestieri che tra' Sapienti e Filosofi colui a gran diritto si annoveri che tra' Geometri si distingue. E come tale, a pienezza di ragioni, non si appellerà il Ruffini? Il quale, e per le sudate Opere che un tesoro tramandano alla posterità, e per ogni maniera commendevole di benemerenza nel pubblico insegna-

(2) Cic. Tuscul. I. 1.

mento, e per le sincere testimonianze di alta stima tributategli da dotti uomini, uno si ha a reputare de' maggiori italiani Geometri de' nostri tempi? questi essendo appunto gli argomenti di una giusta celebrità pe' coltivatori delle Scienze?

Proclive Paolo naturalmente alle meditazioni del numero e della estensione, già fatti con singolare profitto ne avea gli studi sotto la direzione dell'insigne nostro Cassiani, cui non iscema lode presso i concittadini andar egli per avventura d' opere sconosciuto fra gli stranieri, e del quale ripeter possiamo, il maestro in un ricordando e il discepolo, che dai Forti sono i Forti generati. Furono i progressi del giovine Allievo luminosi cotanto che di succedere gli meritarono al suo Institutore nella Cattedra d' Analisi, non anche il quinto lustro compiuto di sua età, l' altro incarico poco appresso aggiungendosegli d' insegnar eziandio Elementi di Geometria e di Algebra.

L' orrenda Catastrofe dipoi accaduta, che sul declinar del secolo Europa immerse nella desolazione e parve i popoli respingere nella barbarie, dovea egli pure il nostro Professore di sè la prova offerire che siccome l' esterminio allora minacciavasi d' ogni virtù, così non era sufficiente riparo l' onesto ragguardevol sapere. E di certo a sua gloria non tenne ridondò che spogliato in quell' epoca luttuosa Egli venisse di suo istruttivo Magistero, e che un feroce ostracismo dal Tempio della sapienza avesse a riportare un più incolpabile Aristide. Ma il sapiente basta a se stesso: le privazioni e quanto d' infingardìa e di noja cagion sarebbe per le volgari anime, non porgono a lui che stimolo novello a preclari intraprendimenti. Avvenne in tal modo che si vedesse la matematica scienza del nostro Paolo stabilirsi, crescere e frutti produrre di esimia fama dove sembrava che sul punto fosse d' inaridirsi e di perdersi nel suo germoglio. Voi ben v' accorgete, o Signori, che imprendo a favellare della generale Teorica delle Equazioni, Opera grave di tanto senno che fondamento è dell' altre ch' Ei ci lasciò.

Gettava di que' tempi l' Archimede di Torino, il sommo Lagrange, vivissimi lampi di nuove formole, di eleganti metodi, di analitiche dottrine, di stupendi ritrovamenti pressochè in ogni ramo della sterminata scienza del Calcolo. Dovunque l' indagatrice sua mente si rivolgesse, dileguavano le difficoltà, la geometrica evidenza dominava, i confini estendevansi di quella provincia. Ma non per tutto poteva egli soffermarsi quanto i vantaggi esigessero della scienza, la quale però a magnifico edifizio somigliante, per lui vedeasi ampiamente ricomposta, perfezionata l' intelligenza del disegno, accresciuta la solidità delle forme, abbellito il gusto degli ornamenti; non restando a chi seguito l' avrebbe, architetto minore, fuorchè una moltitudine di operazioni e teoriche particolari. Nè alla sua perspicacia le determinate algebriche equazioni sfuggirono e la soluzion loro, ogniqualvolta il quarto grado si oltrepassi. Non sì tosto però ebb' egli il piede alquanto inoltrato per entro l' impenetrata selva di calcoli che si restò e da nobile brama di maggiori palme affrettato colà si volse, quelle che già stava per cogliere ad altri lasciando che in ciò esperto poco meno di lui accinto si fosse animoso all' abbandonato tentativo. Al Ruffini cedette il Lagrange la corona, orrevole per fermo e memoranda, avvegnachè la gara eccitasse delle culte Nazioni per ottenerla ed a' molteplici replicati sforzi di prodi Geometri lungamente fosse rifiutata, ove dir non si voglia che in essa fu duopo un diritto italico rispettare.

E presentì forse l' Italia che l' algebrica solubilità generale delle equazioni a que' canoni si riduce che riconobbero primi e fissarono i suoi Scipion Ferri, i suoi Tartaglia, i suoi Cardani, i suoi Bombelli; e la matematica impossibilità, pei gradi oltre il quarto, fin d' allora trapelando, forse presentì ella pure che la rigorosa dimostrazion di tal limite al suo Ruffini si riserbava. L' emule Nazioni contuttociò, di miglior successo non disperando, immensi conati adoperarono per aggiugnerlo. Una schiera di sublimi Analisti, fra i quali i Vie-

ta, gli Harriot, i Cartesii, un Newton, i Maclaurin, divisò di appianare il sentiero all' arcana meta inaccesso, le principali proprietà discuoprendo nell' equazioni di qualunque grado, e parecchi di tale schiera la soluzion ricercarono di alcune equazioni particolari, lusingati per avventura che malagevol meno sarebbesi aperto il varco alla generalità per l' indiretta via de' casi individuali. Sull' orme di Hudde nuovo drapello si mosse e fu esso veduto investire il Problema di fronte, l' immediato abbassamento del grado tentando nelle superiori equazioni. Alle prove indi le prove accumularonsi, alle indagini le indagini, e in mille guise vi si esercitarono i Le-soeur, i Fontaine, i Lagny, i Waring, i Marguerie, i Vandermonde e, per dir molto, Leibnitz che solamente nutrì speranza di aver il metodo rinvenuto a determinar le radici d' ogni proposta equazione. Vi si cimentarono infine reiteratamente Tschirnhaus, Bezout, e il massimo de' calcolatori Geometri, Eulero, i quali però da tanto resistere atterriti parve non osassero che la disamina intraprendere della equazion generale di quinto grado. Nulla rispose all' intento, quando armato di sua analisi l' italiano Lagrange l' insufficienza dimostrò dei metodi di Tschirnhaus, di Bezout e di Eulero a risolvere una equazion qualunque di quinto e dei gradi più elevati (3). Le famigerate Riflessioni di Lui una teorica inattesa dispiegarono intorno alle permutazioni delle quantità nelle funzioni che le contengono, applicandosi poi e le semplici e le composte quantità alla rappresentanza delle radici di un'equazione e dei loro valori. D' altro non fa d' uopo; che già il filo della verità nelle dettate Lagrangiane permutazioni si afferra, quantunque sia difficil cosa il giovarsene al pari che, se non fu meno, il rinvenirlo.

Laonde incominciì adesso lo Storico delle Matematiche ad antivedere, come di mezzo a barlume, e sclami allegoriz-

(3) Accad. di Berl. per gli anni 1770-71.

zando „ che le opere esteriori della forte Piazza sono da ogni „ banda superate; che ridotto il Problema nell' ultimo e interior „ suo recinto vi si difende però tuttavia, e che anzi vi si „ rende più formidabile, gli ostacoli raddoppiando e le resi- „ stenze al vincitore „ Chiegga egli subito appresso „ Quale „ fia il genio fortunato che per assalto riuscirà a trionfare, o „ forzerà in qualsivoglia modo la capitolazione? „ (4) Questo „ genio è il Ruffini, il quale gli accorderà poi modesto, che „ se alcuno giunga mai alla compiuta risoluzione di quistion „ così interessante, convien credere che a tanto somma- „ mente avranno le riflessioni e gli accorgimenti contribuito „ di Lagrange „ (5).

Tale si affaccia l'estrinseca importanza del Teorema la prima volta dal nostro Geometra nella sua generale teorica dell' equazioni dimostrato intorno alla insolubilità di un' equazion determinata qualunque di grado superiore al quarto: nè per certo potrà alcuno il concetto scemarne, solo che rifletta avere infruttuosamente le forze loro sperimentate un Newton e un Eulero, ed essersi un Lagrange arrestato; il che quasi alla matematica dimostrazione equivale della insolubilità, o almeno di molto peso la conforta. E non minore si estimerà l' utilità intrinseca, benchè negativa, del Teorema stesso; poichè i progressi delle cognizioni ritardandosi, e per l' ampiezza illimitata delle Scienze, e pel corto acume dell' umano intendimento, assai benemerita rignardar si dovrà l' opera di colui che un confine in qualche parte discuopre, accerta, ed appalesa.

Dopo di che, avendo noi appena un punto rammentato della generale Teorica dell' equazioni, chi tutti ridir potrebbe i pregi di quell' aureo Trattamento? Quivi, a dirne pure alcun cenno, s' accoglie ciò che di grande pervennero gli Algebristi sull' equazioni a definire; ma le altrui medesime de-

---

(4) Montuc. Hist. des Mathem, T. III. pag. 28.

(5) Luog cit. pag. 57.

terminazioni hanno il secondo Inventore nel Ruffini pei legami reciproci, per l' ordine armonico del tutto e delle parti, per l' esattezza e lucidità della esposizione. Nella natura dell' equazioni ne vedi il fondamento; nella risoluzion d' esse lo scopo; nelle speciali affezioni delle radici dell' unità l' anello di questa con quella. Oltre a che di frequente al non comune di secondo il titolo s' addice d' Inventor primo che è de' pochissimi. Da semplicissima idea, connaturale all' indole di qualunque equazione, semplicissima formola emerge e da questa le omnigene relazioni fra il grado, le radici, e i coefficienti dell' equazion generale, i celebri Newtoniani Teoremi circa le somme e i prodotti delle potenze delle radici, e il Teorema non men celebre di Cartesio sulle variazioni e permanenze dei segni, come da natia vena, scaturiscono. Le Dottrine di Lagrange, nella ipotesi da lui ommessa delle irrazionali funzioni, ricevono pel nostro Geometra compimento. Il caso irreducibile, quell' apparenza di paradosso che presentano, strana cosa, le Matematiche, inevitabile si dimostra e necessario. E come di questi, sparsa così è l' opera di altri algebrici trovati in numero e di assai rilievo, che lungo troppo sarebbe, anche di volo, accennare. Breve si dica e senza tema di errare, la Teorica del Ruffini essere nel suo genere prima fra quelle che si conoscono, sembrando anzi conveniente l'avvisarne alcune relazioni di somiglianza col prezioso Volume delle Funzioni analitiche di Lagrange, Opera che la Scienza esatta segna in oggi per la maggiore.

Il Geometra della Dora a' veri principii riduce nello sviluppo Tayloriano e nella legge di successiva derivazione il Calcolo differenziale, e a concetto evidente e primitivo richiama il nostro Matematico la determinazion delle proprietà dell' equazioni. Il differenzial Calcolo, cangiato nome e calcolo divenuto delle funzioni, è generale nel Tayloriano Teorema che lo sorregge: le eccezioni d' esso accadono per valori particolari delle variabili, non mai per generica forma delle funzioni. Così l' impossibilità di sciogliere le equazioni

di grado al quarto superiore luogo ha sempre nella forma generale delle Funzioni che le radici rappresentano, benchè possa ne' particolari Problemi succedere che la risoluzion si ottenga di una equazione di grado qualsiasi. Di applicazioni fecondo, pressochè infinite, alla Geometria e alla Meccanica riuscì il nuovo Calcolo delle funzioni, e alla dottrina dell' equazioni una vastissima provincia non manca di applicazioni geometriche. Se non che in quell' opera di funzioni ragionasi, in questa di equazioni; in quella sono le variabili considerate, in questa le incognite quantità; in quella è Lagrange il Principe de' Geometri; non ha in questa Ruffini chì lo agguagli, meno chì lo superi.

Ma le gravi ed insigni scoperte, comecchè annunziate, s' affidano per alcun tempo all' esclusiva intelligenza di chi le produsse, ed è mestieri che l' autor medesimo i proprii dubbi ne tolga, e combatta le promosse da altri scabrose opposizioni. Affaticato erasi nell' equazioni il Ruffini, come di mezzo a folto bosco, se concedasi l' immagine, vergine al ferro, irto di selvatici bronchi, e quasi al meriggio impenetrabile. Con animo generoso le spine attraversando a spiar Ei giunse da lungi, e diresti da uno spiraglio, la celata verità, e di averla scorta potè convincersi. Il sentiero non ostante per lui dischiuso provar dovcasi angusto alle prime, torto, intralciato; perchè la nuova gloria gli spettasse di allargarlo e renderlo praticato. E parte di lode in ciò si debbe ad altro nostro vivente Concittadino (6), il quale di acuta sagacità fornito rilevò il primo che il Teorema della Insolubilità esatto compariva e generale per le sole equazioni del quinto grado. Non tardò Paolo a convenirne, e con alacrità pari alla nobile schiettezza a perfezionar si ridusse il più inallora sentito

(6) Il Sig. Consultore Conte *Pietro Abati* Membro onorario della Soc. Ital. delle Sc., negli Atti della quale ha pubblicato alcune sue interessanti e ingegnose Memorie sulle Equazioni.

che spiegato discuoprimento. La Memoria, ch'Egli ne pubblicò fra quelle dell'Italiana Società, un pieno rigore apportò di raziocinii al combattuto Teorema, così per l' equazione di quinto, che per quelle de' gradi superiori.

Scenderà poscia nella palestra versato egli pure profondamente nell' equazioni l' illustre Malfatti, e una particolare analogia crederà scorgere nel Teorema di Ruffini a generiche forme sollevata. (7) Rispondegli Questi, e con pieno trionfo liberi mostra da siffatta analogia i proprii calcoli e ragionamenti. E non pago ancora che l'altrui perizia gli somministri argomento di laboriose illustrazioni, si crea da se medesimo nuovi dubbj ingegnosi, e tutti nello sciorli ti persuade alla fine che, fatta pure astrazione da qualunque metodo o legge di trasformazione, alla ventura non vien commessa l' algebraica espression d'una Radice, nella quale si avveri una general equazione il quarto grado eccedente. Diasi però il maggior plauso ai due magnanimi avversarii de' leali sensi di stima e di urbanità vicendevole con che nella scientifica disfida si diportarono. Frattanto a noi caro sarà che un Malfatti protesti doversi il Ruffini fra Geometri di prima fama noverare nel tempo che per congiunto medico sapere la memoria Ei ridesta de' Cardani e de' Commandini.

Presumerà da ultimo il Signor Hoëne Wronski di affrontar l' Equazione di grado qualunque, e col metodo alla Polonia indiritto, che nuovo sarebbe, ove quelli mancassero di Eulero (8), si procaccerà credito nella risoluzion dell' equazioni di secondo e terzo grado. Nulla in vero avranne a paventare pel proprio Teorema il Ruffini. Nondimeno dettarne amerà compendioso scritto, onde si comprovi irrepugnabilmente l' insussistenza del vantato metodo oltramontano. Nulla, dissi ne temerà il Ruffini; imperciocchè, all' epoca delle pro-

---

(7) T. XI. degli Atti della Soc. Ital. delle Sc. pag 579 e seguenti.

(8) Biblioteca Ital. T. XXI. pag. 279-80.

clamate analitiche invenzioni del Wronski, nell' opuscolo uscito da' torchii modenesi l' anno 1813. si reggerà inconcussa la Tesi del nostro Professore.

Sublime opuscolo, pel quale ogni nube, scomparve in faccia alla verità, piano e breve divenne il sentiero che ad essa conduce, preciso e immutabile il confine dell' algebrica Scienza, e il nome del Modanese Geometra accennossi alla Immortalità. Ivi tanto di nerbo in se racchiude la generale dimostrazione che sopra se stessa ripiegandosi chiaro ne svela il perchè siano le equazioni di terzo e quarto grado risolvibili. E tanta intellettiva proprietà godono le teoriche più esimie dell'analisi, che l' umano pensiero ad un punto sollevasi, donde, come da eminente vetta i sottoposti objetti e il vario lor digradarsi ad una rivolta di ciglio si presentano. Nè dell' altro pregio è a tacersi che un principio risguarda sviluppato nella parte seconda dell' opuscolo ad inferirne la trascendentale insolubilità delle equazioni.

Il Brunacci, chiarissimo Ingegno dell' età nostra, riconobbe con Lagrangiano accorgimento che le operazioni diverse del calcolo tutte da una legge procedono di uniforme derivazione. Ma da ciascuna operazione di calcolo emergono molteplici risultamenti, ne' quali altresì, per recondita legge, mirabile armonia sussiste, cui meditando, primo il Ruffini la determina. Questa legge fra individui cotanto astratti sarebb'ella mai ciò che v' abbia di più semplice e di più fecondo nell' analisi? Certo è che in simil pregio di spirituale feconda semplicità oltre ad ogni concetto nostra mente si spinge, e men da lungi nell' Ente perfettissimo s' affisa della divina Intelligenza.

Non ho voluto proferir io giudizio sulla principale scoperta del Modenese Analista nella Dottrina dell' equazioni. Dopo la ricordata pubblicazion dell' opuscolo il celeberrimo Paoli (9), del quale il suffragio pareggia l' unanime voto dei

(9) Dalla gentilezza dell' egregio | Sig. Avvocato Luigi Ruffini, Fratello

valenti, si diè convinto della Insolubilità. Odasi il Magistrini nell' Elogio di Lagrange (10), che di equazioni parlando, riserba al Ruffini la gloria di aver raggiunto in questa parte la meta. Interroghiamo altri Matematici, e fra gli stranieri ne dirà il Cauchy (11) che il titolo dell' equazioni aggregava il Ruffini a' Geometri corrispondenti della Real Accademia Parigina delle Scienze. Ne dirà il Segretario della Società Reale di Londra Tommaso Young (12) che favorevole all' Insolubilità si è pure il voto individuale de' Brittanici Ingegni. So che la Commissione accademica dei Lagrange, Lacroix e Legendre di pronunziar s' astenne intorno alla dimostrazion del Professor Modanese; ma so ancora che di que' giorni comparso non era l' opuscolo dianzi celebrato; e non ripugna l' osservare, che sebbene il Sig. Delambre (13) interpreti graziosamente il silenzio dell' Accademia, non è sì grave in simili casi il dritto d' infallibilità per un Tribunale, che la ragion matematica abbia a restarne per non emesso giudizio debilitata.

Ora di tante cose ribocca il mio soggetto che mi astringe a tralasciarne di molte. Non v' incresca quindi ch' io taccia di quella Memoria elaboratissima intesa a scioglicre le equazioni particolari di superior grado, nella quale i criterii e le norme si fermarono, quando a riconoscere se la proposta equazione si possa di grado abbassare, quando per eseguire la soluzione possibile riconosciuta; non meraviglia perciò che venisse meritata di premio dall' italiana Società delle Scienze.

---

ed Erede del nostro Professore, essendomi stato conceduto di vedere il carteggio che ebbero col Professore medesimo alcuni grandi uomini, io ne ho approfittato per citarne opportunamente le lettere.

Lettera al Ruffini 27 Giugno 1814.

(10) Opusc. Scientifici di Bologna Fascic. XIV. pag. 103.

(11) Lett. al Ruffini 20 Sett. 1821.

(12) Lett. al Ruffini 17. Marzo. 1814.

„ Les particuliers, qui ont vu votre Memoire, en ont été tres satisfaits, et is sont d'avis que Vous avez reussi á démontrer ce que Vous vous êtes proposé d' établir „ parole del Seg.° della Società Reale.

(13) Lett. al R. 18 Maggio 1811.

E trapasserò pure la Memoria, che Opera più presto si direbbe, e degna estimata della massima Corona dalla Società medesima, sulla determinazion delle radici di tutte le equazioni numeriche per modo approssimativo; argomento di vigilie ai Newton, ai Bernoulli, ai Simpson, agli Euleri, e sopra gli altri al Lagrange che metodo elegantissimo ne propose perfezionato dal Ruffini nella speditezza delle pratiche operazioni, e per l' immediata espression decimale delle radici, e pel diminuito numero de' tentativi, e pel rapido crescere de' coefficienti, onde più prontamente si trascurino i termini ulteriori. Nè anche vi parlerò dell'Algebra elementare coll' Appendice dal Paoli (14) riputata nella scelta, nell' ordine, nel dimostrativo rigore pregevolissima, per cui sentenziò ben condotti gli elementi di una Facoltà allora solo che a comporli s' adoprano uomini grandi. Per le quali cose incontrastabil si rende aver giovato il Ruffini all' Analisi non tanto negativamente, segnando nell' equazioni i limiti certi di suo dominio, quanto altresì col promoverne i luminosi positivi avanzamenti. Nè a ciò si restrinse il suo acume; perocchè divenuto familiare colle verità del calcolo, queste il prodigioso poter loro gli dispiegarono e a mieter palme lo scorsero ne' campi della Geometria, finitime Scienze, sendo l'Algebra una scritta Geometria, e la Geometria un' Algebra figurata. (15)

La Quadratura del Circolo, che a se mi chiama, è uno di que' Problemi, i quali a guisa di perigliosi scogli s'incontrano nelle matematiche. Ben veggenti alcuni spiriti s'accinsero benefici a sgombrar l' illusione, e il Gregory, il Newton, il Saurin ed altri dimostrarono il Problema di non fattibile risolvimento. Parve nulladimeno al D' Alembert che privo il Newtoniano Teorema di esattezza rigettar se ne dovesse la conseguenza. In questo arringo di antiche e rinascenti dispute entra il Ruffini, ne instituisce i processi, d' ineluttabili prove

(14) Lett. al R. 7. Settembre. 1809.

(15) Bailly. Hist. de l' astron. mod. T. III. pag. 138.

afforza la proposizione di Newton, al D' Alembert risponde, l' obbjezion dissipandone del confronto fra il circolo e la cicloide, fra il Problema della Quadratura e quello della trisezion dell' angolo rettilineo, e simile a regal fiume che la fertilità diffonde a più terre e provincie, stende la dimostrazione della intentabile quadratura a intiere famiglie di curve, nelle quali l' Appolloniana Iperbola comprendesi; il perchè impossibile poi bassi a riguardare eziandio la rettificazione della Apolloniana Parabola. E qual impresa più ampia e malagevole non attende il nostro Analista?

Per algebrico impensato concetto di Cartesio sembrarono le curve moltiplicare e una specie offerire di geometrico Universo (16). Il bisogno quindi sentito di una Classificazione, si mise a stabilirne i caratteri quel Genio che involò il segreto alla Natura nel meccanico principio delle Curve celesti, e noverò Egli poscia le curve a semplice curvatura del terz' ordine. Ma le difficoltà per ordini più elevati aumentano in corrispondenza degli analitici ostacoli a superarsi maggiori nello sciorre le rispettive equazioni. Cramer ed Eulero finalmente le diffinitive proprietà ravvisano nelle curve di quart' ordine, parlano del loro numero; nè altro osando, si trovano oltre a ciò discordi ne' risultamenti. Chì pertanto intrepido cimenterà sè stesso nello spinoso labirinto di calcoli pressochè immensi? Chì la paziente disamina sosterrà della general equazione a due variabili che ogni curva piana rappresenta, ed escluderà, stranieri alla immediata quistione, l' analitico paralellogrammo di Newton e il triangolo algebrico dell' Ab. de Gua? Chì per tal esame la via si aprirà a conoscere le riposte affezioni delle curve a distanze infinite, e forse nella obbliquità o nel paralellismo de' diametri delle assintotiche Iperbole o Parabole additerà il criterio, onde senza equivoco appropriare la classificazione a tutti gli ordini delle curve, e farà palese ad un

(16) Bailly. Hist. de l' astron. moder. T. III. pag. 137.

tempo la ragione della differenza fra Cramer ed Eulero? Non altri che il Ruffini, nella cui vasta mente si raccoglieva l'archetipa idea dell' esimio lavoro, che morte a troncar venne allora che l'utilissimo discioglimento da ognuno si affrettava. Il quale deplorabil caso non tolse al nostro Paolo di vivere chiaro per questa non meno che per l'altre sue opere, le quali porgeranno per avventura ferace materia di più sublimi quistioni, e fors' anco di più famosi scovrimenti.

Siccome poi nella dovizia del sapere, nell' amor dell'ordine, nell' osservanza del linguaggio riseggono le qualità eccellenti ad apprendere altrui le matematiche, non si dee chiedere quanto fosse per pubblico insegnamento benemerito il nostro Collega. Ne rispondono per me i lodati elementi dell' Algebra e delle sue applicazioni, gl'inediti Scritti di Geometria, il profitto di que' discepoli che avrebbero accresciuto lustro alla pacifica scienza calcolatrice, ove le marziali cure non fossero insorte, e voi ne rispondete per me, pregiati Giovani, che alla istruzione di tanto Maestro grati ascrivete il filosofico Lauro che vi adorna. Aggiugnerò solamente che ridonato il Ruffini alla Cattedra d'Istituzioni analitiche quella pure gli si commise di calcolo sublime, e che divenuto in appresso Professore di Matematica applicata, all' epoca auspicatissima del reduce Estense Reggimento venne su questa ultima Cattedra dalla Sovrana Fiducia confermato qual lume di nostra Università rifiorente.

Non meno è nota l' estimazione in che lui tennero Uomini preclarissimi, e prova ne danno i sinceri tributi di un Gregorio Fontana, di un Saladini, di un Cossali, di un Canterzani, di un Pasquich (17), e di un Europeo Ingegno sobrio di lodi, equo in pronunziarle (18). Potrei dire che un Guglielmini e un Venturoli consultano il Ruffini, e se ne chiamano riconoscenti (19); Quegli per alcune annotazioni ad

(17) Lettere diverse al R.
(18) Bibliot. ital. T. I. pag. 227-28. Art. anon.
(19) Lettere dei nominati al R.

un suo opuscolo; questi per copia di sussidii nell'Opera che principalmente illustra il suo nome. Bensì rammenterò il giudizio di bennato Spirito in accreditato Giornale fintosi pellegrino, che d'un rapido pensiero discorrendo l'Italia saluta in suo passaggio l'indefesso Piazzi, il celebre Fergola, il rinomato Paoli, il valoroso Magistrini e dopo avere, secondando i moti di pietà, sparso di alcun fiore l'avello del Bonati, ad ammirar viene fra noi, grande nell'analisi, il Ruffini (20).

Al grido delle quali testimonianze ammutolisca quella voce, non so se maligna o invidiosa, che tacciava il Ruffini di non uscire giammai dell'equazioni. Qualora si consideri, com'è pur forza, l'immensità delle Matematiche, chi non avvisa ricercarsi continuo studio, lungo vivere, attivo genio a coltivar di quelle ogni ramo e a primeggiarne in uno de' più ardui e de' meno illustrati? Chi vorrà quindi scemar lode al Ruffini che versato in tutte le parti della scienza, in una si trattenne e i brevi giorni vi consacrò a ritrarne, quasi da inesausta miniera, tesori insperati? Così anzi prescrive saggia economia che le scientifiche occupazioni distribuisce, e appena si eccettuano un Newton, un Eulero, un Lagrange relativamente ai progressi dell'intera Matematica, e quanto a tutte insieme le Scienze del solo Leibnitz affermar si potrà ch'Ei le facesse progredire, que' Romani emulando forti a reggere dai lor cocchi fin otto cavalli di fronte (21). Sebbene, oltre il titolo di Geometra, quelli altresì al nostro Paolo si addicono di profondo Metafisico e di Medico insigne.

Gli eccessi opposti adontano del pari e pregiudicano la Filosofia; e se in obbrobrio e scapito della ragione ridondò altre volte il servaggio che le imposero il Peripato e la Stoa, uno smodato abuso di libertà non le cagionò di recente mino-

(20) Bibliot. ital. T. XVII. pag. 109-10.
(21) Fontenelle. Elog. de Leibnitz.

ri mali. Quello stesso abuso terribile, che di ruina minaccia le morali Repubbliche, di scompigliar anco s' attenta l' intellettuale imperio della verità, quando meglio non si dica il primo di questi effetti essere del secondo luttuosa conseguenza. Nemica la verità delle scolastiche forme e delle dialettiche sottigliezze impone contuttociò sovrane leggi, cui non è senza grave perturbazione l' infrangere. Da questo Codice venerando d' incorrotti dettami non dipartendosi in sue specolazioni la solitaria Metafisica, esatta definisce, dimostra severa, legittima deduce, raggiunge il certo, il dubbio risolve, appalesa il falso e procacciasi tuttora l' intimo altrui convincimento. Non tenni, o Signori, così vago il discorso che non mirassi al Ruffini, e men rendono chiara fede l' opuscolo sulla Immaterialità dell' anima, e le critiche Riflessioni sopra il saggio filosofico intorno alle probabilità del celebre Sig. Laplace. E qual aberramento e qual più informe congerie di assurdità che il sensorio e le contrattili fibre nel sistema dell' inglese materialista Zoonomo Erasmo Darwin? Come di paralogismo non vien egli tratto in paralogismo vituperevolmente il Francese Geometra ne' suoi Calcoli di probabilità a morali oggetti applicati? Frutti d' abusata libertà nell' esercizio della ragione per tacer della radice più infetta che lo stesso abuso alimenta. Quali non sono per lo incontro i trionfi della retta Metafisica e nel Teorema della spiritualità dell' essere intelligente, e nella vigorosa confutazione del Darwiniano sistema, e nelle irrefragabili considerazioni sulla libertà dell' anima, sul divino attributo di Provvidenza, e sulle asseveranze de' testimonii ai paralogismi opposte del Laplace? E chi fu nelle accennate pugne l' Eroe, cui fra 'l plauso fregiò due volte di singolare Corona il Gerarca del Vaticano, se non il Ruffini? Avvezzo Egli alla forza della metafisica ne' concetti dell' analisi matematica e sentitone il bisogno ne' degeneri tempi, se ne armò a difesa del vero, quasi d' egida invulnerabile.

Per l' altra parte, benchè a me non s' appartenga assegnar intrinseca misura al medico sapere di Paolo, non pertan-

to all' inabilità mia copiosi fatti suppliscono, li quali a niuno fra noi è lecito d' ignorare. Imperciocchè ricorda la nostra Università ch' Ella Dottore acclamollo in Medicina, graduandolo a un tempo nella superior Chirurgia, e ricorda col sentimento generoso della propria gloria il prezioso dono a lei fatto nel Professor di Clinica medica e di pratica medicina dal saggio consiglio dell' eccelso Principe. Noi tutti ricordiamo quanta fosse la Real confidenza e l'amore verso il Ruffini che del titolo il volle onorato di special medico dell' augusta Famiglia. Ricorda per ultimo ogni ceto di Cittadini che dove un qualche morbo infierisse fra le nostre mura, all'ippocratico soccorrimento Lui si chiedeva, o si bramavano almeno i suoi consigli. E ben gli acquistarono medico-letteraria celebrità alcuni scritti, de' quali uno, già di pubblica ragione, s' intitola „ Memoria sul Tifo contagioso „, e degli altri, s' attende, con desiderio non minore di comune vantaggio, la postuma luce.

Se non che un precipuo carattere di sapienza commendar si debbe ne' ministri dell'arte salutare. Medico il Ruffini, matematico e metafisico sentia meglio che altri tanto esser lungi la Terapeutica dall' assoluta certezza, quanto che lo scopo di sue indagini, comecchè plausibilissimo, del continuo contraddice ad un vero irrevocabile, la nostra mortal condizione. Quindi alle speranze dell' egra Umanità e allo studio di confortarla quella fiducia rimane di risultamento che sulla osservazione riposa e sulla sperienza. Il nostro Clinico non riconobbe altre Guide e alieno sempre da una foggia di Cartesianismo, non so per qual fato, intrusa nelle Scuole mediche, abbracciò tal genere di Newtonianismo che, non travisato da larve, cauto procede, e fermo a non dipartirsi da quanto intenda per indagar la causa di ciò che vede, docile per l' opposto si diparte da quanto vede per assegnar la cagione di ciò che intende. (22)

---

(22) Fontenelle. Elog. de Newton.

Nè opinò Egli diversamente per altri bizzarri sistemi di assurde novità, come a dire i lucidi vantati delirii dell' animal magnetismo, romanzi d' una filosofia d' oltremonte, che inestricabile ne' suoi raziocinii dovea condursi al vaneggiamento nello spiegare i fenomeni della natura. No, non partecipano i sommi uomini ad una credulità, che talvolta si estende oltre il volgo; e così Leibnitz in lettera al Magliabecchi negò i divinatorii prestigi di certa rabdomanzia, nulla mosso che il portento vantasse autorità di persona e presenza di testimonio. (23)

Pertanto riunendo al centro le sparse fila di mia Orazione, come, ripiglio, non si onorerà qual sapiente e perciò qual filosofo il Ruffini, grande fra Geometri, profondo fra Metafisici, riputato fra Medici, ognora intento a scuoprire il vero, a sorreggerlo di prove e a sceverarlo da errore? Per le quali sue doti gareggiarono cospicue italiche accademie nell' associarselo; e a dire delle principali, se lo ascrisse quella di Religion cattolica in Roma, il noverò fra suoi l' italiano Istituto, e in epoca anteriore sen' era fatta lieta la Società dei Quaranta, lieta maggiormente quando a suo Presidente lo elesse, e confortata poi, non ha guari, nella elezion di un Successore (24) che allo splendore dell' animo e de' talenti più d' appresso le aggiugne quello del Trono che la protegge.

Quantunque, a ben riflettere, la sapienza è piccola parte della filosofia, e qualora cessi l' encomio di quella, appena la lode di questa prese il cominciamento; stantechè la Filosofia, per continuare con Tullio, (25) non solo dell' ottimo è la cognizione quanto altresì l'esercizio. Infatti come la felicità, cui per ingenito impulso l' uomo aspira, è premio di virtù e morale scopo di filosofia, così troverai detto a ragio-

(23) Leibn. Oper. omn. T. V. pag. 106.

Epist. XVIII. ad Magliab.

(24) S. E. il Sig. Marchese Luigi Rangoni Ministro di Economia e di pubblica Istruzione, attuale meritissimo Presidente della Soc. Ital. delle Sc. ec. ec.

(25) Cic. De Orat. l. 2.

ne non darsi filosofia, senza virtù, ne'virtù senza filosofia (26). E che il Ruffini abbiasi a chiamar Filosofo in questo senso oh! quanti ne sono i titoli ch' io non potrei col discorso tutti adeguare e meno descrivere! cittadino, voi lo vedeste modello nella riverente osservanza delle leggi e nello zelo operoso del pubblico bene: suddito, vi diè l' esempio dell' ossequio, dell' amore, della fedeltà: scienziato, sembrava non esserlo per modestia, per giusto sentire dell' altrui merito, per nullo sprezzo d' ogni persona, per abborrimento all' acre letteraria emulazione: Medico, accorreva sollecito al letto del dolore e nel palagio e nel tugurio, accompagnandolo a quest' ultimo larghezza di beneficenza, e inestimabil cambio riportandone, il pianto della gioja e le benedizioni dell' alleviata mendicità: Professore, a niuno mancò dei doveri nel Portico e nella Scuola, e inspirar seppe di sè ne' giovanili animi confidenza da venerazion temperata: Parente, Collega e amico ei fu la delizia e il desiderio degli amici, de' colleghi, de' parenti, e cara parte de' loro affetti portò con seco in separarsene. Non m' inganno; una lagrima spunta in più d' un ciglio, e palpita più d' un cuore commosso alle tenere rimembranze.

Ma poichè tante s'adunarono in Paolo particolari virtù che il favellare d'ognuna mi divietano, la debita lode almeno se ne compendii osservando che la virtù verace in sè tutte le accoglie, e che, ricco della somma, adorno perciò delle singole compariva il Ruffini. Se quindi ne alletti interrogare i generici lineamenti della virtù, in lui per agevol modo si ravviseranno. Un animo egli ebbe che il meglio non riconosce ed approva che per conformarvi il sistema non interrotto delle proprie azioni. Ed è così appunto che non misurandosi la virtù da' suoi sforzi; (27) bensì da quanto nella via del retto e

(26) „ Nam nec Philosophia sine virtute est, nec sine Philosophia virtus est; Philosophia studium virtutis est, sed per ipsam virtutem; nec virtus autem esse sine studio sui potest; nec virtutis studium sine ipsa „Seneca Epist. 89.

(27) Pascal. Pensèes chap. XXIX. §. 34.

dell' onesto Ella pratica d' ordinario, irreprensibile può vantarsi. Mirabile nel Ruffini il buon uso del tempo, unico possedimento dell'uomo nella natura, ed ei neppur dissiponne i minimi intervalli, che altri vorrebbero inevitabilmente perduti a ricreazion dello spirito. Ed è così ancora che la sublime virtù nell' uso eccellente di sue facoltà instancabile si adopra; il perchè tornami dolce ripetere che in Paolo i pregi convennero di vero Filosofo.

Rimane però che del massimo di tai pregi si ragioni, mancando il quale non dassi vera sapienza, virtù vera, e quindi nè anche vera Filosofia; intendo la pietà. E certamente duopo è si conchiuda con Tullio, (28) che distrutte santità di costumi e religione, perturbamento orribile ne conseguita, estinguendosi colla pietà la buona fede, la società dell' uman genere e delle virtù eccellentissima, la Giustizia. Come inoltre l' uomo, di materia bruta composto e dotato di organica vita, privo nulladimeno sarebbe di sua immortale grandezza senza il raggio spiratogli in volto dal divin Creatore, così non avrebbe in se Filosofia che stupida materia nella sapienza e meccanica vita nella virtù, quando non l' animasse l' eterna particola ragionevole, la Religione. E qual esempio non offre di se stesso in questa veduta il Ruffini, del quale può dirsi che fu perfetto Cristiano perchè vero Filosofo, e perfetto Filosofo perchè vero Cristiano? Nè in lui distinguevi sapienza e virtù da Religione, conciossiachè se coll' intendimento ei rivolgevasi alla verità, e con volere costante il bene seguiva, in lui tali potenze sempre anelavano all' Obbietto infinito di entrambe. La grata memoria di sua pietà edificante vive così che mi risparmia il penelleggiarne i singolari tratti, perchè pubblici

---

(28) „ cum qua ( parla della pietà ) simul et sanctitatem et religionem tolli necesse est: quibus sublatis perturbatio vitae sequitur et magna confusio. Atque haud scio, an pietate adversus Deos sublata, fides etiam et societas humani generis et, una excellentissima Virtus, justitia tollatur „ Cic. de Nat. Deor. I. 2.

in molta parte e quotidiani. Sebbene, Ei medesimo fra noi si perpetuò in quella soave preghiera, onde assistere degnamente alla Vittima Eucaristica, monumento di pura divozione ardentissima, ove la bell' Anima, che il dettò, la propria immagine, quasi in terso cristallo, v' impresse.

Giunta a questo passo l' Orazion mia, mentre gli encomii del Ruffini ceder dovrebbe ad una sacra e ben più copiosa eloquenza, cerca essa invece, bramosa di venerarlo, il vero Filosofo cui descrisse, ed ahi! che ovunque giri lo sguardo quaggiù nol ritrova. Sconsolata rammenta il tristissimo giorno decimo di Maggio di quest' anno 1822. che a tutti i voti lo rapì, e querelasi che sì celere un tal giorno spuntasse, e accusa di sua ferita un tal anno: giorno che spogliò Filosofia di uno de' suoi ragguardevoli ornamenti: anno che lascia mietute le vite più care alle scienze e alle arti, le quali vestite a gramaglia vanno per Europa lamentose chiamando a nome l' Ipparco francese, (29) l' annoverese Galileo (30), il Fidia italiano. (31)

Se non che giova il confortarsi e trarre argomento di magnanima emulazione dai trionfi della pietà e del sapere. Vi torni quindi alla mente per la perdita di Paolo e il lutto d' ogni ordine di Cittadini, e la pompa del Feretro affettuosa e magnifica, e la funebre laudazione. Che resta dunque se non che sorga il marmoreo desiderato monumento, il quale con patria festività s' intitoli = al vero Filosofo =? Quivi accanto all' urna mediti sapienza un volume vergato colle cifre più arcane di Diofanto, come in sulla Neva per Eulero (32) guarda pensosa Geometria le sublimi formole degli astri: quivi a duolo atteggiata serbi virtù nel duolo stesso amabilità e candore: e Religione, lasciata quivi cadere sul marmo l' adorabile benda, volgasi con sue luci divine al cielo e le venga sul labbro il sorriso.

---

(29) Delambre.

(30) Herschel.

(31) Canova.

(32) Acc. des Scien. Eloge d' Euler.

# *E L E N C O*

*delle Opere del defunto Professore Paolo Ruffini cronologicamente disposte.*

Ruffini Professor Paolo. *Teoria generale delle equazioni, in cui si dimostra impossibile la soluzione algebraica delle equazioni generali di grado superiore al quarto. Bologna* 1798. 8.° *tomi II.*

( Tom. IX. p. 44. ) delle Memorie della Società Italiana delle Scienze. *Della soluzione delle equazioni algebraiche determinate particolari di grado superiore al quarto* 1802. *premiata dalla Società suddetta.*

( Tomo suddetto pag. 527. ) *Riflessioni intorno alla rettificazione ed alla quadratura del circolo.*

( Tomo X. parte II. delle Memorie della suddetta Società ). *Della insolubilità delle equazioni algebraiche generali di grado superiore al quarto, e lettera Abati,* 1803.

*Memoria sopra la determinazione delle radici nelle equazioni numeriche di qualunque grado.* 4.° *Modena appresso la Società Tipografica* 1804, *coronata dalla Società Italiana.*

( Tom. XII. delle Memorie suddette pag. 213. ) *Risposta ai dubbii propostigli dal Socio Gian Francesco Malfatti sopra la insolubilità algebraica delle equazioni di grado superiore al quarto* 1805.

( Ivi pag. 321. ) *Riflessioni di P. R. intorno al metodo proposto dal consocio Malfatti G. F. per la soluzione delle equazioni di 5.° grado.*

*Della immaterialità dell' anima,* 8.° *Modena, Soliani* 1806.

( Memorie dell' Istituto Nazionale Italiano Tom. I. p. II. pag. 433. ) *Della insolubilità delle equazioni algebraiche generali di grado superiore al quarto qualunque metodo si adoperi algebraico esso siasi, o trascendentale.*

*Algebra, e sua appendice,* 8.° *Modena* 1807 *e* 1808, *Tomi II., appresso la Società Tipografica.*

(Tom. XIII. Società Italiana parte I. pag. 292.) *Alcune proprietà generali delle funzioni.* 1807.

( Tom. XVI. suddetta pag. 373. par. I. ) *Di un nuovo metodo generale di estrarre le radici numeriche.*

( . . . ) *Appendice alla suddetta Memoria,* 1813.

*Riflessioni intorno alla soluzione delle equazioni algebraiche generali. Opuscolo. 4.° Modena* 1813. *appresso la Società Tipografica.*

( Tom. XVIII. della Società suddetta parte fisica fascicolo II. pag. 350. ) *Memoria del tifo contagioso,* 1820.

( . . . . . parte Matem. pag. 56. fascic. I. ) *Intorno al metodo generale proposto dal Signor Hoëne Wronski onde risolvere le equazioni di tutti i gradi.*

( Tom. stesso fascic. I. di Matematica pag. 69. 269. ) *Opuscolo I. e II. della classificazione delle curve algebraiche a semplice curvatura.*

*Riflessioni critiche sopra il Saggio filosofico intorno alle probabilità del Sig. Conte La-Place,* 8.° *Modena appresso la Società Tipografica* 1821.

*Elogio di Berengario da Carpi recitato nella Chiesa di S. Carlo l'anno* 1793. *stampato nel T. III. dei Fasti Letterarii delle Città di Modena e Reggio, Modena* 1824.

## *SCRITTI INEDITI.*

*Macchina atta a contenere le fratture obblique del femore in modo d' impedire l' accorciamento della coscia.*

*Proprietà delle radici della unità in una Memoria presentata al R. C. Istituto di Scienze, Lettere, ed Arti.* (1).

*Memoria sui razzi alla Congreve.*

*Memoria sulla definizione della vita di Brown* stampata nell' Amico d' Italia, giornale di Torino *nel Quaderno di Dicembre* 1822.

---

(1) Questa Memoria vedrà presto la luce fra quelle dell' Istituto suddetto.

*Simile sul problema medico = Determinare, se le idee „ che si danno nelle moderne scuole mediche della eccitabi- „ lità, e dell' eccitamento sian bastantemente esatte e pre- „ cise; e in caso che non lo siano, determinare quali varia- „ zioni debbano farsi rapporto sì a quella, che a questo, e „ dedurre quindi, quali sono le idee precise, che dobbiamo „ formare della diatesi sì iperstenica, che ipostenica, della „ irritazione, degli stimoli, dei controstimoli, e delle poten- „ ze irritative. „*

*Memoria sul principio delle aree*, lavoro compito poco prima dell' ultima malattia.

*Accademie, alle quali fu ascritto il Professor Paolo Ruffini.*

| | *Data delle Patenti* |
|---|---|
| *Accademia dei Dissonanti in Modena, che nel* 1817 *prese il nome di Accademia di Scienze Lettere, ed Arti.* | 5. *luglio* 1791. |
| *Società Italiana delle Scienze.* | „ 1801. |
| *Accademia Italiana di Siena.* | „ 16. *aprile* 1802. |
| *Istituto di Bologna.* | „ 7. *agosto.* 1802. |
| *Istituto Nazionale Italiano, di cui fu membro pensionario.* | „ 6. *aprile* 1803. |
| *Accademia di Religione Cattolica in Roma.* | „ 16. *genn.* 1806. |
| *Accademia de' Filareti, Venezia* | „ 24. *mag.* 1806. |
| *Accademia di Scienze, Lettere ed Arti, Firenze.* | „ 26. *aprile* 1808. |
| *I. R. Accademia di Padova.* | „ 20. *marzo* 1817. |
| *Società Reale Borbonica, Napoli.* | 20. *giugn.* 1818. |
| *R. Accademia Lucchese.* | „ 20. *marzo* 1819. |



Natale Schiavoni dis. Gaetano Bozza inc

# AB. PIETRO CONSALI

P. P. di Calcolo Sublime

nella Imp. R. Università di Padova

Membro del Res. R. Istituto

nato in Verona il 20 Giugno 1748. morto in Padova il 20 Dicem

# ELOGIO

DI

# PIETRO COSSALI

SCRITTO

DAL SOCIO AB. GIUSEPPE AVANZINI

*Ricevuto li* 30. *Dicembre* 1822.

Pietro Cossali, Membro del C. R. Istituto, uno dei quaranta della Società Italiana delle Scienze, Professore di Calcolo Sublime nella I. R. Università di Padova, e Socio delle più Illustri Accademie d' Italia, nacque in Verona nel dì 29. Giugno del 1748. del Conte Benassù, e della Contessa Laura Malmignati. Egli intraprese i primi studj nelle Scuole de' PP. Gesuiti di S. Sebastiano, e furono sì rapidi i suoi avanzamenti nelle belle lettere, che il suo P. Istitutore volle che da suoi condiscepoli fossero celebrati con poetiche composizioni, e da loro recitate alla sua presenza. Nella Scuola di Filosofia trovò già inoltrato l' insegnamento, e terminati i due primi Libri d' Euclide; ma egli apprese questi da se solo, raggiunse, e sorpassò i suoi compagni con maraviglia de' suoi Maestri.

Chiamato dalla sua vocazione a ritirarsi dal Secolo, e a farsi claustrale, egli andò tra i Gesuiti in Novellara, ai quali la fama de' suoi Talenti facea già presagire, che divenuto sarebbe uno dei più chiari ornamenti di quella dotta Compagnia; nè egli avrebbe certo deluse le loro speranze, se ammalatosi gravemente pel troppo fervore col quale si diede a tutte le pratiche del Noviziato, non avesse dovuto ritornare alla casa paterna. In questo tempo alzava gran fama di sapere un Chierico Regolare Teatino che in Verona insegnava Filosofia in S. Maria della Ghiara. Riavutosi alquanto il Cossali, e stimolato continuamente dalla passione di questa Scien-

za andò a compierne il corso sotto la direzione di quel valentissimo Padre. Con Lui egli scorse il libro sulla forza dell' umano intelletto, e sul diritto uso nella ricerca della verità del Volfio, la sua Ontologia, Cosmologia, Psicologia razionale ed empirica, la Teologia naturale, la Fisica Astronomica, e sì profondamente ne apprese le Dottrine, ch' egli appena giunto alla età di 18, anni per tre giorni consecutivi difese in Latino con ammirazione di tutti la intera Astronomia, e non poche scelte Tesi tratte dalle altre opere di quel diligente laborioso, e dotto Autore.

Nel tempo di questi studj il Giovine Cossali ebbe occasione di conoscere le discipline dell' Istituto Teatino, nè sembrandogli, siccome quelle de' Gesuiti, sì contrarie nella loro esatta osservanza alla sua salute assecondando l' impulso della sua vocazione al chiostro, si fece Teatino. Nel tempo del suo Noviziato in Milano si applicò indefessamente allo studio della Sacra Eloquenza, della Teologia, delle Matematiche, e della Fisica, essendo pur servir Dio l' attendere alla coltura ed al perfezionamento di quelle Scienze, che guidando alla spiegazione dei maravigliosi fenomeni della Natura, vagliono non poco ad ingrandire l' idea che noi ci formiamo dell' Onnipotente Creatore.

Il primo saggio de' suoi profitti nella Sacra Eloquenza fu la Novena del Natale ch' egli predicò in Como con molta lode dei dotti che l' ascoltarono.

Compiuto il suo Noviziato, e solennizzati i suoi Voti, gli fu concesso, com' egli bramava, di rivedere lo Stato Veneto. Fornito, siccome egli era, di tante cognizioni, e ansioso di accumularne di nuove, era ben ragionevole ch' egli indirizzasse i suoi passi alla Città sede e maestra di tutte le discipline. In Padova pure per dovere del proprio Istituto fece con molta lode la Novena del Natale, ed il nome acquistatosi di valente Orator Sacro lo recò a celebrare con orazione panegirica le lodi della Beata Beatrice d' Este, Orazione che non a torto fu stimata degna della pubblica luce.

Sì dotto egli si dimostrò pure negli studj Teologici, che non ancor giunto all' età dei 23. anni fu invitato a salire la Cattedra di jus Canonico in quella cel. Università, e farsi compagno degli Stellini, dei Poleni, e dei Morgagni, i quali allora con tanto applauso dei Dotti Nazionali, e Stranieri facevano risplendere quella scuola. Ma tanto onorevole invito, e le istanze affettuose e pressanti di molti dotti amici non poterono lusingare l'amor proprio del nostro Cossali, e tenerlo dal ricusare quella Cattedra, onde dedicarsi più intensamente all' esercizio dei propri ufficj di Teatino, ed allo studio, che andava in esso divenendo passione, delle Matematiche, e della Fisica.

Nel 1778. si trasferì a Verona invitatovi da quei PP. Teatini a predicare nella propria Chiesa per tutto quell' anno. All' insegnamento delle Divine Dottrine congiunse quello della Filosofia ai suoi Novizzi, e della Fisica sperimentale ai suoi Concittadini non perdendo però mai di mira il suo studio favorito delle Matematiche.

Il primo frutto di questi suoi studj sì fu la composizione di un picciolo libretto stampato in Venezia del 1779. dedicato al Veneto Ammiraglio Angelo Emo. L'importanza, e la difficoltà dell' argomento non farà riputar disdicevole, che un libretto di poche pagine sia dedicato all' Espugnatore di Susa, di Biserta, e di Sfax. Trattasi in esso di un paradosso analitico per risolvere il quale si esercitarono indarno, ma con molta lode dei loro acuti ingegni, i più celebri matematici dei due passati secoli. Nella risoluzione, come si sa, delle equazioni di 3.° grado prive del secondo termine, mediante lo spezzamento della proposta in due equazioni, si ottengono in alcuni casi le tre radici sotto la forma immaginaria quand' esse sono tutte reali incommensurabili ed ineguali. Nel suo Opuscoletto il Cossali fa vedere che da quanto scrisse Cardano nel Cap. I. della sua *Regula Aliza*, le tre radici immaginarie nascono perchè dagli analisti posteriori si è usato malamente di quel spezzamento estendendolo oltre il caso, ed

il limite assegnato dalla natura. Poco dopo l' Accademia di Padova diede al Cossali occasione di continuare le sue indagini sullo stesso argomento. Propose ella pel concorso al Premio del 1787 „ di dimostrare se sia assolutamente impossibile „ di liberare dalle quantità immaginarie sotto le quali nel sud- „ detto caso ci si presentano le tre radici della Equazione di „ 3.° grado quando sono reali. „ Travagliato il Cossali da grave malattia non ebbe tempo di raccogliere i suoi pensieri su questa ricerca, e di concorrere al premio. Non essendosi però da nessuno de' concorrenti quello ottenuto, e riputando egli utili le cose da lui frattanto escogitate, e estese, le pubblicò nell' Anno 1782. in una sua Dissertazione, ch' egli in qualità di Lettore diresse all' Accademia stessa. In essa inclina il Cossali per ingegnosi ragionamenti alla comune opinione dell' assoluta impossibilità a cagione del solito spezzamento, e di ciascuno degli altri possibili a farsi.

Contrario alla comune opinione generale si dichiarò il cel. Ab. Nicolai Professore ed Accademico di Padova in suo voluminoso Opuscolo pubblicato nel 1783. Esaminate le ragioni sulle quali è fondata quella comune credenza, si avvisò che la questione non richiedeva meno che l' esame imparziale, e severo dei primi fondamentali principj analitici, abbracciati da tutti senza esitanza, e riserva. Da questo esame parve al Nicolai di potere inferire la falsità dei comuni principj sugli Immaginarj, sopra le Equazioni, e sul Calcolo differenziale; e dai nuovi ch' egli sostituì come più giusti inferisce la possibilità della soluzione del caso in questione.

L'Opera del Nicolai diede al Cossali l' occasione di comporre un altro lavoro intitolato *Lettere Apologetiche Critiche* inserite nel così detto *Giornale* dai Confini d'Italia per l' anno 1783, e seguenti. L' oggetto di queste lettere è di porre nel più chiaro lume la giustezza, e la verità dei principj combattuti, e messi in dubbio dal Nicolai, e di mostrare la insussistenza dei nuovi da lui sostituiti e delle sue nuove soluzioni del caso irreducibile. Ma a tal uopo conobbe il Cossali necessaria

un' altra ricerca. Il Nicolai, reca ad esempio della giustezza de' suoi principj una equazione del d' Alembert, da lui stesso e dagli altri matematici tenuta per vera, e legittima quantunque sembrino derivare da essa dei paradossi. In una lettera scritta ai 9. Luglio del 1783. dal Cossali al d'Alembert ed inserita dappoi nel Tomo IX. delle Memorie della Società Italiana delle Scienze egli spiega i paradossi della misteriosa equazione Alembertiana; e fa veder per tal mezzo, che le Dottrine inferite dal Nicolai nascono dal aver egli dato alla Equazione medesima un senso, e dal farne ad essa un' applicazione non conveniente.

Nel 1784. pubblicò il Cossali la sua eccellente Dissertazione *sull'Equilibrio esterno, ed interno delle Macchine Aereostatiche*. Chiama egli equilibrio esterno l' eguaglianza fra il peso della Macchina e il peso di un eguale volume d' aria considerato ad un' altezza indeterminata dalla superficie terrestre; per equilibrio interno intende l' eguaglianza tra la forza del fluido elastico racchiuso nel globo, e la coerenza delle molecole del suo proprio integumento. Il Cossali determina l' espressione algebrica dell' uno, e dell' altro equilibrio, e con la formola del 1.° stabilisce la grandezza del globo, perchè s' innalzi a qualsiasi altezza, e con la formola dell' altro ritrova l' altezza, alla quale può il globo inalzarsi senza il pericolo di scoppiare per lo sforzo del fluido elastico che lo riempie. A queste belle ricerche aggiungono non piccolo pregio le sottili sperienze fatte dall' Autore per discoprire, o per rendere più esatti alcuni rapporti che entrano nelle formole dell' Equilibrio non ancor conosciuti, o ridotti dai Fisici alla precisione dalle qualità delle loro applicazioni richiesta.

Nel 1785. trasmise il Cossali agli Autori degli Opuscoli scelti di Milano uno scritto *sopra il limite comunemente non avvertito della consueta regola di doppia falsa posizione*. Insegna in esso nuove regole pei casi posti fuori di tal limite, ed un facile artifizio propone per trasformar questi casi, e per appoggiarli alla regola comunemente ricevuta.

Avvenne circa questo tempo che il cel. Lorgna pubblicò le sue indagini sul calcolo integrale divise in undici proposizioni. Il Giornalista di Pisa ne censurò la terza, e la quinta risguardanti la integrazione delle equazioni lineari a coefficienti tanto variabili che costanti. La censura del Giornalista accese tra lui ed il Lorgna vive questioni. Il Cossali prese il partito del giornalista, per cui poi altra vivissima lite insurse tra il Cossali, e il Lorgna, la quale non si estinse che all' apparire nel 1786. 1787. di due Opuscoli del Cossali intitolati il primo, la *Controversia analitica* tra il cav. Lorgna, e il Giornalista di Pisa *decisa col fatto*, l' altro intitolato: *Confronti a pubblico lume*, ec. Tali infatti sono i ragionamenti, e le prove recate dal Cossali in favore del Giornalista, che il Lorgna già ricco abbastanza di dottrina, e di fama per altre sue opere potè al Cossali accordare la vittoria.

A questi lavori algebrici, e fisici del nostro Accademico tributarono molta lode chiarissimi Matematici d' Italia, e di Francia. L' Ambasciatore a Parigi del Duca di Parma Don Ferdinando I. testimonio degli encomj fatti al Cossali dai Dotti di quella ingegnosa nazione ne informò il Principe, il quale per prova dei meriti ai posti di pubblica istruzione altra norma non credendo più sicura che l'alta generale riputazione degli uomini, nominollo nel 1787. alla Cattedra di Fisica teorica, e nel 1791, a quella di Astronomia, Meteorologia e Idraulica nella sua fiorente Università. Colla assiduità, e sublimità dell' insegnamento di quelle scienze il Cossali corrispose pienamente alla fiducia del Principe, e i suoi Discepoli corrisposero col loro profitto alle premure del Precettore, il quale si studiava, che quelle tenere piante, alla sua cura affidate, crescessero vigorosi sostegni della Patria, e dello Stato.

Ma l' Uomo consecrato alla coltura delle Scienze, e delle Arti è risponsabile alla Repubblica Letteraria di tutto quanto il bene ch' egli può fare, e tutti gli istanti della sua vita esser debbono impiegati nel promoverlo, ed ampliarlo. Il Cossali soddisfece pienamente a tanto dovere. Negli intervalli del

tempo lasciati dalla scuola, e dalle pubbliche, e private commissioni si occupò indefessamente, e senza interruzione nel comporre ed ordinare un'Opera divisa in due grandi volumi, e intitolata: *Origine, trasporto in Italia, e primi progressi in essa dell'algebra, istoria critica di nuove analitiche, e metafisiche disquisizioni arrichita.* Ella è dedicata al suo Principe mecenate, il quale volle che a carico del suo tesoro ne fosse fatta una splendida e ricca edizione. Il primo volume uscì alla luce nel 1793, l'altro nel 1797. Alla storia dei lavori scientifici del Cossali mancherebbe la parte più luminosa, e istruttiva, se colla necessaria ampiezza non si esponessero la novità, e l'importanza degli argomenti, e i malagevoli, e laboriosi studj, che a ben trattarli dovette intraprendere, e la ricca messe di verità e di scoperte che ne raccolse.

Che l'algebra fosse prima coltivata in Grecia, e poscia in Arabia era un punto d'Istoria, nel quale tutti unanimamente concordavano gli storici; ma intorno alla sua origine sì nell'una come nell'altra Nazione, erano divise ed opposte le opinioni. Dell'algebra greca taluni credevano inventore Diofanto (1), mentre altri pronunziarono francamente (2) non potersi ciò dimostrare. Dell'algebra Arabica pretendevasi da parecchj (3) ch'essa traesse l'origine dalla Greca, alcuni altri ripetevanla dall'Arabia stessa (4), altri dall'Indie (5). Nella parte, che spetta all'origine dell'algebra imprende il Cossali a esaminare quale di queste opinioni sia da abbracciarsi, e quale altra ad esse da preferirsi se non come la vera, almeno come la più verosimile, e meglio fondata.

Vuolsi dell'algebra Greca inventore Diofanto, perchè Diofanto in alcuni luoghi della sua Opera parla il linguaggio di un uomo che espone cose nuove, e sconosciute, e non cita mai verun Matematico; sì perchè da' Greci posteriori, e da-

(1) Andres.
(2) Montucla.
(3) L'Autore anonimo della *Biblioteca Arabica de Filosofi*, Andres.
(4) Frate Luca.
(5) Leonardo Pisano.

gli Arabi non citasi, che Diofanto, e perchè il Bachetto il più dotto, e profondo interprete di Diofanto lo chiama padre ottimo e prestantissimo della logistica.

Il Cossali esaminò diligentemente l' Opera di Diofanto, e il modo, e il lingnaggio che tiene nella esposizione delle due analisi determinata, e indeterminata delle equazioni di primo e secondo grado, e tutte trascorse le Storie Greche ed Arabe nelle quali o potevasi, o parlar doveasi di Diofanto. Da questo faticosissimo studio egli venne a raccogliere: che Diofanto può dirsi inventore della sola analisi indeterminata, perchè in questa sola Diofanto parla e ragiona siccome uno che inventa cose nuove, e disconosciute; che da' Greci non si è parlato prima di Suida di Diofanto, e Suida nè chiaramente nè distintamente ne parla; che dal solo Abulfaraggio si parla di Diofanto, ma traendo tutto da Suida; e finalmente che il nome di padre ottimo, e prestantissimo della logistica, dato da Bachetto a Diofanto, intender si dee nel largo senso del più antico maestro a noi rimasto e conosciuto.

Se Diofanto non è l' inventore che della sola analisi indeterminata delle equazioni di primo, e secondo grado; per la ricerca dell' origine più verosimile dell' algebra Greca bisognava dunque fondatamente stabilire chi poi fosse, o dir si potesse l' inventore dell' analisi determinata. Il Cossali ravvisando nei dati 58, 59, d'Euclide sotto forma Geometrica l'arte della risoluzione delle equazioni di secondo grado, e nei dati 84, 85. scorgendo due delle applicazioni di essa anche presso di noi ordinarie, non riputò mal fondata la conghiettura: che la soluzione delle equazioni dei primi due gradi tragga l' origine dal trasporto, che nello spazio de' secoli scorsi da Euclide a Diofanto, abbia fatto taluno dalla Geometria all' Aritmetica i dati 58, 59, e che Diofanto abbia forse posta in chiaro ed ampliata d' alcun poco l' analisi di quelle equazioni.

Vuolsi l' algebra Araba originaria dalla Grecia, perchè l' anonimo Egiziano autore della *Biblioteca Arabica de' Filo-*

*sofi*, il Libro più antico, che ci dia tracce relative all' origine dell' algebra fra gli Arabi asserì che: quanti Arabi di *Algebra scrissero, sui fondamenti di Diofanto insistettero.*

All' esame di quest' asserzione il nostro Istorico si avvisò di dovere per maggiore chiarezza e precisione premettere in che veramente consistesse l' algebra Araba, e da chi siasi coltivata, insegnata, e promossa.

Di tali materie si parla nella stessa Biblioteca Arabica de' Filosofi, nell' Arabico-Hyspanica del Casiri, nella Storia delle Dinastie dell' Abulfaraggio, nella Geografia, e Storia del Cazuineo, e in altre non poche opere di antichi, e moderni accreditati Scrittori. Considerati dal nostro storico, e discussi con fina critica tutti i passi di queste opere a quegli argomenti relativi, separati i dubbj, e gli improbabili, e i contradditorj dai ben comprovati, e dai più ragionevoli, Egli stabilisce come un punto d' Istoria, sul quale non può cader dubbio alcuno:

1.° Che l' algebra Araba ripartita era in tre parti. Nell' Analisi delle equazioni di primo, e secondo grado, e queste adornate, e munite di Euclidee dimostrazioni.

2.° Nella scala de' gradi, e nella soluzione delle equazioni pure di que' gradi superiori, che per ripetuta elevazione quadrata e cubica si generano.

3.° Nel trasferimento a determinata forma quadrata, o cubica degli incogniti polinomj all' idea di una equazione completa di 3.° grado, e nello scioglimento di essa, e di altre equazioni cubiche, o complete, o imperfette.

4.° Che Moamad-ben-Musa-Khuaresmita fu il primo a insegnare agli Arabi la prima parte a un di presso nel tempo del Kaliffo Haroun, cioè nei primi lustri del Secolo IX. e che i successori di Moamad si rivolsero alle altre due parti.

Da questi preliminari il nostro Istorico passa a mostrare insostenibile l' asserzione dell' anonimo Egiziano:

1.° Perchè Moamad-ben-Musa non poteva aver tratta la prima parte da Diofanto per esser difficile, se non pure im-

possibile ch' egli alzato siasi a intendere le sottigliezze di Diofanto, nè trarre dai primi libri l' arte algebraica per la soluzione delle equazioni di primo grado, e in seguito con penetrazione maggiore raccogliere l'analisi delle equazioni di secondo grado, senza inviluppars i e perdersi nelle astruse contemplazioni dei più reconditi rapporti de' numeri, e negli infiniti spazj dei problemi indeterminati, ove frequentemente si smarrì lo Xilandro, e talvolta il Vieta, ed eziandio il Bachetto.

2.° Perchè nemmeno i successori di Moamad potevano da Diofanto avere appresa la seconda parte, perchè la Scala de' gradi fondamento primario, e forse unico, è per ogni verso di natura, di principj, e di progresso, differente presso gli Arabi e presso Diofanto; perchè nell' algebra Araba non si fa uso degli astratti simboli, e Diofanto si serve di un simbolo astratto per significare il numero sconosciuto, e di un altro a indicare il meno; e che la terza parte soltanto esser poteva, se non in tutto in parte almeno, cavata da Diofanto, perchè nel tempo in cui si coltivò erasi già Diofanto introdotto in Arabia, comentato, e illustrato.

Vuolsi l' algebra Araba originaria dall'Arabia stessa, perchè Frate Luca lo disse, dall'Indie, perchè lo asserì Leonardo di Pisa; e perchè dall' Indie si è trasportata agli Arabi per le mani de' Persi.

Il nostro accademico ci fa osservare che solamente per incidenza, e indeterminatamente chiama Frate Luca gli Arabi dell' algebra primi inventori; che Leonardo di Pisa si appoggia ad una semplice asserzione sprovveduta di prove, e che non è vero altrimenti che dall' Indie siasi trasportata in Arabia per le mani de' Persi.

Dimostrata, per le dette prove, la insussistenza delle diverse opinioni intorno all' origine dell'algebra Araba il nostro Storico propone la propria se non come dimostrativamente vera, la meglio fondata, e la più ragionevole. Questa è che l' algebra sia dall' Indie agli Arabi derivata per le mani di Moamad-ben-Musa.

1.° Perchè, se come egli mostrò, Moamad-ben-Musa non apprese dai Greci l' analisi delle equazioni di primo, e secondo grado, o la inventò egli stesso, o la imparò dagl' Indiani.

2.° Perchè delle due conseguenze tener deesi più ragionevole la seconda, essendo che dall' opera dello stesso Moamad e da quanto ne scrissero gli storici, nessun lume trapela intorno al merito di sua invenzione; per lo contrario assicurandoci la Storia che Moamad era un Matematico di una regione all' India vicina, perito nell' Indiana lingua, amante delle Indiane opere, le quali egli traduce, emenda, compendia, e adorna; che l' algebra presso gli Arabi non era che un Membro dell' aritmetica, o della logistica; che un libro di Logistica Indiano tradusse Moamad, libro prestante, nel quale spicca l' acutezza, e l' ingegno degli Indiani per le preclare loro invenzioni; parve al nostro Istorico ben ragionevole, che quel libro esser dovesse l' analisi aritmetica delle equazioni di primo e secondo grado, e che il più bello degli ornamenti de' quali è fregiato, stato sia di corredare di Euclidee dimostrazioni le regole.

Che l' analisi Arimetica delle equazioni del 1.°, e 2.° grado sia stata dall' Arabia trasportata in Europa, era altro punto di Storia da tutti generalmente gli Istorici abbracciato. Ma da chi siasi trasportata, in qual tempo, in quali Città prima, e in quali altre dappoi siasi diffusa, e per opera di chi, erano molti, e diversi i pareri. Di due cel. Istorici uno (1) con molta prudenza, e quasi per conghiettura, l' altro (2) francamente, e senza esitanza dichiarò che dai Mori, e dagli Arabi si trasferì in Ispagna, e dalla Spagna si diffuse pel resto dell' Europa, chi disse prima in Inghilterra, poi in Italia, altri dissero (3) credersi quasi generalmente portata da Leonardo di Pisa in Italia nel cominciare del Secolo XV. (4); che il pri-

(1) Andres.
(2) Gua-de-Malves.
(3) Montucla.
(4) Boisat.

mo a far conoscere l'algebra in Italia fu Guglielmo de Lunis (1).

Nella parte che spetta al trasporto dell' algebra in Italia assume il Cossali l'intralciatissimo esame di queste opinioni.

A istituirlo con fondamento di verità ricorse ai Codici, e ai molti libri che ne parlarono. Dall'accuratissimo studio degli uni, e degli altri ne inferì come altrettante verità di fatto: che Leonardo di Pisa trasportò l' analisi delle equazioni di primo, e secondo grado dall' Arabia in Toscana nell' entrare del Secolo XIII: che Leonardo di Pisa fu il primo a insegnarlo in Pisa; che da Pisa se ne diffuse la coltura, e l' insegnamento prima per le altre Città della Toscana per opera di Guglielmo de Lunis, di Rafaello Canacci, di Paolo, di Dagomari di Prato, di Pietro della Francesca, indi in Venezia insegnata dalle pubbliche Cattedre da Paolo della Pergola, e da Domenico Bragadini, dappoi pel resto d' Italia, ove ne divenne comune lo studio sotto i varj nomi di *Arte della cosa*, di *Arte d' algebra* ed *Amulcabala;* di *Pratica speculativa*, di *Arte maggiore*, e che finalmente con queste impronte Italiane trascorse i confini d' Italia e per l' Europa si dilatò.

Ma il merito degli Italiani non si restrigne all'aver eglino portata l'algebra dall' Arabia in Italia e ad averla prima d' ogni altra nazione Europea coltivata, e insegnata. Gli Italiani furono anche i primi ad arricchirla di nuove scoperte e ad estenderla oltre que' confini che aveva in Arabia, e manteneva in Italia, quando vi fu recata dal suo Leonardo. I Matematici Italiani, che tanto di lei meritarono sono lo stesso Leonardo di Pisa, Luca Paccioli del Borgo di S. Sepolcro, Scipione Ferreo Bolognese, Tartaglia Bresciano, Cardano Milanese, Lodovico Ferrari, e Bombelli pure di Bologna. Nella parte spettante ai *primi progressi* imprende il Cossali a mostrare che a nessun di loro si è resa dagli scrittori la dovuta giustizia, e a porre nel più chiaro e pieno lume la vera, e compiuta storia dei loro analitici ritrovati.

---

(1) Canacci.

Di Leonardo di Pisa si disse (1) che niente aggiunse all' analisi Araba delle equazioni di primo e secondo grado.

Il Cossali esaminò l' analisi Araba e quella di Leonardo contenuta nel suo Abacco composto nell' anno 1200. Nel confronto dell' una con l' altra ci mostra non esservi ragione alcuna da dubitare che non abbia Leonardo all' analisi Araba aggiunto la scoperta delle due radici delle equazioni di secondo grado, e perchè Moamad-ben-musa primo Maestro tra gli Arabi ne ha dimostrata una sola, e perchè in alcun modo non può sapersi se dimostrato le abbiano i successori di Moamad fino a Leonardo, quando per lo contrario Leonardo chiaramente dichiara che in una delle equazioni di grado secondo (*) due sono i valori dell' incognita, e prendendo in doppio senso il radicale rispetto ad essa equazione suggerisce di far lo stesso nello scioglimento delle altre.

Di Leonardo si disse in oltre; che le sue dottrine sui numeri quadrati egli tolse tutte da Diofanto. (2)

Il Libro dei numeri quadrati di Leonardo andò disperso, o perduto, o sepolto in qualche Biblioteca, e le dottrine, ch' esso contiene non si trovano che nell' algebra di Frate Luca, due secoli e mezzo dopo composta, senza ordine e oscuramente esposte, non poche senza dimostrazioni, o con dimostrazioni assai difettose. Il Cossali ce le presenta tutte chiaramente e con precisione dimostrate, e poste in quell' ordine, che le intrinseche qualità loro gli fecero scoprir necessarie ad agevolarne possibilmente il comprendimento. Dalle opere di Diofanto, e de' suoi interpreti e commentatori raccolse ancora il Cossali le Dottrine sui numeri quadrati del Greco analista, quelle vi aggiunse non osservate da Bachetto, nè coltivate dai posteriori analisti, e neppure dall' Eulero nè dal La Grange, e quelle arrichisce d' illustrazioni, e di prove ch' egli osservò o non bene, o per nessun modo dimostra-

(1) Bossut.

(*) $x^2 + n = px$

(2) Xilandro.

te. Nei due Quadri che offre il Cossali delle Dottrine di Leonardo, e di Diofanto egli ci fa vedere: non potersi in alcun modo non che con fondamento d' indubitate prove asserire, che tutte le Dottrine di Leonardo sieno quelle di Diofanto, perchè invece di scorgervi quella rassomiglianza che essere vi dovrebbe tra l' Originale, e la Copia, grande è la diversità che vi si ravvisa; perchè non vi si osservano che tre questioni a Diofanto, e a Leonardo comuni, e non senza qualche diversità, perchè Diofanto scioglie molti elegantissimi, e sottilissimi Problemi da Leonardo non tocchi, e reciprocamente Leonardo ne tratta alcuni di singolare beltà e finezza, che in Diofanto, od almeno nelle opere che di lui ci restano, non si ritrovano; perchè le maniere in generale di Leonardo nella soluzione de' Problemi sono diverse da quelle di Diofanto; e perchè finalmente Leonardo non poteva neppure aver veduto nè nella Greca, nè nella original lingua, nè nell' Araba versione, nè nelle dimostrazioni di Moamad Albuziani l' opera di Diofanto.

Vogliono che neppur Frate Luca, come Leonardo, abbia nulla aggiunto all' analisi Araba delle equazioni di 1.°, e 2.° grado, e che soltanto egli abbia accennato a tentone delle soluzioni particolari delle equazioni di terzo grado dichiarando impossibile una regola certa, e generale (1). Il nostro Cossali consultò l' algebra di Frate Luca, vincendo intrepidamente le quasi insormontabili difficoltà che a ben intenderla essa presenta per certi segni, e vocaboli e riduzioni affatto ignote ed annunziate con un linguaggio tenebrosissimo, e per le algebriche operazioni talvolta mozze, talvolta devianti dal giusto cammino, e terminanti a scopo diverso. Per mezzo di questo faticosissimo studio, il nostro Storico ci fa sapere: che Frate Luca fu il primo a insegnare la soluzione delle equazioni derivative di secondo grado: il primo a scoprire la soluzione delle equazioni derivative di 4.° grado (2) potersi ot-

(1) Andres, Montucla, Bossut.

(2) $x^{2m} \pm qx^m + n = 0$.

tenere col mezzo dello scioglimento della equazione del secondo: il primo ad applicar questo metodo al caso che il grado della derivativa sia eguale a 2, o ad altra potenza qualunque di 2: che il metodo di Frate Luca per estrarre in tal caso la radice quadrata di un binomio, o di un reciso (1), è sì naturale, sì legittimo, sì felice, che la moderna analisi sdegnar non dovrebbe di abbracciarlo: che Frate Luca dichiarò veramente impossibile a sciogliersi due equazioni di 3.° grado (2), ma solamente per rispetto alle cognizioni d' allora, non già perchè egli credesse essenzialmente impossibile una regola generale: che Frate Luca trattò, e sciolse prematuramente un' equazione di 4.° grado completa (3): ch' egli ha parimente sciolte equazioni esponenziali, nè delle semplici solamente nelle quali la incognita sta com' esponente (4), ma di quelle ancora, nelle quali la incognita sta come fattore insieme, e come coefficiente (5).

Le soluzioni particolari delle equazioni di 3.° grado trovate a tentone da Luca de Burgo prepararono a Scipione Ferreo la scoperta delle soluzioni generali. Ma gli storici non convengono intorno al numero, nè intorno alle qualità delle equazioni. Vogliono alcuni che due ne abbia egli sciolto (6), altri una sola.

Nessuna opera, o scritto lasciò Scipion Ferreo. Di lui, e de' suoi ritrovati parlarono solamente il Tartaglia, e il Cardano, e da quanto essi ne scrissero il nostro Storico raccolse: che Scipion Ferreo una sola equazione sciolse mancante del secondo termine (7) senza però palesarne la dimostrazione, e confidandone la sola regola al suo discepolo del Fiore.

---

(1) $+\frac{1}{2}q+\sqrt{\frac{1}{4}q^2\mp n}$, chiamavasi allora binomio, e $\pm q\mp\sqrt{\frac{1}{4}q^2\mp n}$ reciso.

(2) Quali sono $fx^3-gx=n$; $fx^3+n=gx$.

(3) $x^4+mx^3+px^2+qx-n=0$.

(4) $\overset{x}{a}=b$.

(5) $x\overset{x}{a}=b$.

(6) Wallis.

(7) Della forma $x^3+px=q$.

Molto più innanzi andò in queste ricerche il Tartaglia. Egli sciolse la equazione di Scipione Ferreo, ed altre due mancanti pure del secondo termine (1), ma si vuole che il merito della scoperta sia dovuto al Cardano, perchè egli ne ha corredato di dimostrazioni le regole (2).

In più luoghi del *Generale Trattato sui numeri e misure* pubblicato dal Tartaglia nel 1556, egli dichiara di aver pure quelle regole dimostrate, ma come dimostrate le abbia non poteva inferirsi, che da qualche asserzione sparsa qua, e là nel *Generale Trattato*, e da alcuni Teoremi ch'egli asserisce di avere inventati a dimostrazione delle regole stesse. Il Cossali supplendo coll'acuto suo ingegno a questi tronchi e imperfetti materiali da quelle asserzioni, e da quei Teoremi maestrevolmente deduce; aver Tartaglia considerato:

1.° Che la soluzione in generale delle equazioni di 3.° grado consistere dovea nella ricerca di un binomio irrazionale.

2.° Che per riguardo alla prima equazione (3) il primo membro essendo eguale ad una quantità razionale, sostituito in esso in luogo della incognita il binomio irrazionale, il membro trasformato esser dovea pure eguale ad una quantità razionale:

3.° Che ciò non poteva verificarsi senza che il binomio non fosse eguale alla differenza delle radici cubiche di due quantità indeterminate, e la equazione spezzabile in due, delle quali la prima consistesse nella differenza delle radici cubiche delle due indeterminate eguale al 4.° termine; e la seconda fosse il prodotto delle due indeterminate eguale al cubo della terza parte del coefficiente, del quale è fornita la incognita contenuta nel terzo termine:

4.° Che da questi principj il Tartaglia inferì che per sciogliere la prima equazione por si dovea la ricercata radice eguale alla differenza dei cubi di due incognite, e sostituire

---

(1) Della forma $x^3 = px + q$; $x^3 + q = px$.
(2) Montucla.
(3) $x^3 + px = q$.

i valori di queste desunti dalle due suddette equazioni. La quale regola è appunto quella del Tartaglia osservata nello scioglimento della prima equazione. Quanto allo scioglimento della seconda il nostro Storico fa vedere: che Tartaglia osservò dover valere la regola, che vale per lo scioglimento della prima cambiando soltanto nella somma la differenza delle radici cubiche delle indeterminate. Rispetto alla terza equazione Tartaglia dichiara, ch' essa si scioglie colla seconda, se ben si guardi ch' esse sono per natura quasi congiunte. Ma come per questo congiungimento di natura abbia il Tartaglia sciolta la terza equazione argomentare non si può, se non da questo: cioè che per quella congiunzione di natura la radice della 3.ª equazione involgendo, siccome osservò Cardano, la radice della seconda, abbia il Tartaglia sostituito nella espressione di quella il valore della radice di questa già ritrovato colla prima regola.

Assicurata in tal modo al Tartaglia la gloria della scoperta restava al nostro Istorico a vendicarlo di un' altra imputazione ingiusta egualmente quanto la prima. Si disse di lui (1) che oltre le tre equazioni mancanti del secondo termine egli ne sciolse tre prive del 3.°; ma che il merito anche di queste soluzioni deesi al Cardano, perchè egli fu il primo a trovarle, e a dimostrarne le regole.

Nel *Generale Trattato sui Numeri* e *Misure* il Tartaglia fedelmente racconta le sue analitiche scoperte, ed in qual tempo, e per quali ragioni e in quali occasioni le fece. Il Cossali ne espone pure con fedeltà tutta la Storia, e in essa ci fa conoscere non potersi in alcun modo rivocare in dubbio: che Tartaglia, non già Cardano, fu il primo a trovare lo scioglimento di quelle equazioni nell' occasione di una sfida ch' egli ebbe col Bresciano Tonino de Loi, e che il metodo da Tartaglia immaginato sì fu di privarle del secondo termine, e ridurle così alla forma delle tre prime, e colle

(1) Montucla.

regole per lo scioglimento di queste pervenire alla soluzione di quelle; e che finalmente alla soluzione delle sei di 3.° grado Tartaglia aggiunse la soluzione di tre altre del sesto (1).

Ma non solamente si fece al Cardano il torto di attribuirgli scoperte non sue, che si giunse perfino ad accusar quelle a lui veramente dovute d' imperfezioni e di errori, e a tacer d' altre molte che tanto lo onorano e per la loro importanza, e per la sottigliezza, e l' attività del suo ingegno.

Si asserì che Cardano sia stato il primo a scoprire l' analitico paradosso sul caso irreducibile, ma che poi esitò se la quantità rappresentata per la formola Tartagliana fosse o no reale quantunque contaminata d' immaginarj, o significasse o no nella equazione una assoluta impossibilità di radice (2). Vuolsi, che Cardano abbia veduto un poco più addentro nella natura delle equazioni, ma che siasi ristretto a distinguere le radici, tacendo poi sopra l' uso delle negative da lui probabilmente riguardate come inutili (3). Finalmente si crede che il Cardano siasi ingannato per riguardo a quelle equazioni che hanno più radici reali, e fornite del medesimo segno per non avere distinte le radici reali (4). A istituire fondatamente l' esame di queste asserzioni era dunque necessario di consultare l' *Arte magna* del Cardano pubblicata nell' anno 1545., e il suo libretto de *Regula Aliza*; opere che tutti racchiudono i suoi lavori analitici. La oscurità del linguaggio nel quale sono scritte, la moltitudine così grande di errori, e di numeri nei calcoli e lettere, sì nelle figure, come nelle relative dimostrazioni, e il tanto disordine, e la sì strana sconnessione di principj, e di ragionamenti stancarono per tal modo la pazienza del nostro Istorico, che fu più volte tentato di abbandonarne l' esame. *Invaghito* però, siccome egli dice, *dello splendore che gli traluceva* dei teoremi, e degli artifizj e confortato dalla importanza, e dalla

(1) Della forma $x^6 + f x^3 = g$, $x^6 = fx^3 + g$, $x^6 + g = fx^3$.

(2) Montucla.

(3) Montucla.

(4) Montucla.

utilità del lavoro perseverò intrepidamente nell' ardua impresa, e dividendo a piccole parti il tempo, e la fatica, giunse finalmente a conoscere in tutta quanta la loro estensione e la loro sublimità i ritrovati, e le scoperte dello strano ed acuto analista milanese. Frutto di questa Erculea fatica sì fu il potere per essa evidentemente dimostrare: esser elleno quelle scoperte ben più luminose, e più estese ed assai meno imperfette di quello che si vogliono dal Montucla. Il Cossali dimostra che il Cardano oltre il merito di avere scoperto l' analitico paradosso del caso irreducibile, ha pur quello di avere tentato ogni via per discoprirne la causa, ed i mezzi per evitarlo: che il Cardano ben lontano dal dubitare che gli immaginarj significassero o no un' assoluta impossibilità di qualunque reale radice, conobbe che la equazione gode di tre radici reali e diseguali, e le determinò nel caso di tutte tre razionali, od una razionale, e due della forma di un reciso: che il Cardano sciolse ancora sette equazioni di 3.° grado fornite insieme del secondo e del terzo termine, e in tutte le forme tranne quella in cui la somma di tutti i termini fosse eguale a zero: che oltre le regole generali per risolvere le equazioni di terzo grado il Cardano ne insegnò parecchie di scioglimenti speciali tratti dai modi della struttura loro, dalla composizione dei coefficienti dei termini ignoti, o dal termine noto, e dai rapporti degli uni con l' altro: che il Cardano dopo di avere distinte le radici, ben lontano dal non parlar delle negative perchè egli le riguardasse come inutili, dichiarò che nelle equazioni a due incognite la radice negativa corrisponde al valore di una delle incognite stesse, e nelle equazioni ad una incognita sola le radici negative usar non si deono quando il Problema esige soltanto una soluzione: che falso è del pari non avere il Cardano considerato nelle equazioni e distinte le radici eguali e fornite del medesimo segno, imperciocchè in una equazione (1) egli chiaramente distinse le

(1) $x^3 = 12\,x - 16$.

due radici eguali e positive $+2$, $+2$. Finalmente fa vedere il Cossali che a questi soli non si restringono i ritrovati del Cardano intorno alla natura delle equazioni. I bei Teoremi: che un' equazione è divisibile per $x \mp m$ essendo $\mp m$ una quantità la quale verifichi l' equazione: che il coefficiente del secondo termine dell' equazione è eguale in grandezza alla somma di tutte le di lei radici: che l' ultimo noto termine della equazione è il prodotto di tutte insieme moltiplicate: che un' equazione di grado pari, o non ha radice alcuna reale, o ne ha un numero pari; che per l' opposto una qualunque equazione di grado dispari ha per lo meno una radice reale, e se di più le ha sempre in numero dispari: che esser vi possono tante radici positive in una equazione quante si trovano variazioni dei segni $+$, o $-$, tante negative quante volte si trovano li due segni $+$, o, i due segni $-$ che l' uno l' altro si seguano, tutti io dissi, questi, ed altri Teoremi furono dal Cardano veduti, e dimostrati per riguardo alle equazioni di terzo grado, e a quelle del secondo, e del 4.° derivative di un grado qualunque: nè dee tacersi per ultimo che il Cardano s' innalzò fino alla sublime Teorica dei massimi, quattro bei problemi sciogliendo ad essa spettanti.

Non meno ingiusti di quello che furono col Tartaglia, e col Cardano si mostrarono gli Storici verso Lodovico Ferrari, e Bombelli.

Del Ferrari si disse, ch' egli fu il primo a sciogliere le equazioni di 4.° grado mancanti del secondo, e del terzo termine, ma che nessuna ne sciolse dotata del secondo (1) e del Bombelli si asserì ch' egli sciolse soltanto le equazioni del secondo termine fornite. (2).

Da ciò che scrisse Cardano nell'*Arte magna* intorno ai ritrovati del Ferrari e da quanto de' suoi proprj espose il Bombelli nella sua algebra impressa nell' anno 1579. concluse il Cossali che al Ferrari è dovuto il merito della soluzione del-

(1) Wallis, Gua-de-Malves, Montucla.

(2) Gua-de-Malves, Montucla.

le equazioni di 4.° grado fornite del secondo termine, e di quelle ancora del terzo; che Bombelli diede l' ultimo compimento alla risoluzione di quelle equazioni sciogliendo del pari le equazioni trinomie e quadrinomie, e tutti i casi di ciascuna classe partitamente.

Del Bombelli si disse ancora (1) ch' egli fu il primo a presentare il calcolo dei radicali, e a far entrare nei calcoli le radici immaginarie.

Il nostro Storico ci fa osservare, che Leonardo di Pisa, secoli quasi quattro avanti il Bombelli nel suo abacco manoscritto fece soggetto del cap. 14. la dottrina del calcolo dei radicali semplici, e composti; che negli stampati voluni di Frate Luca, del Tartaglia, e del Cardano si veggono lunghi tratti su tale argomento; che in quei trattati si veggono non solo le regole tutte che oggi dì si prescrivono per operar su di essi, ma qualche regola inoltre che con discapito della pratica si è lasciata cadere in obblivione; che il Bombelli non fece che delle leggiere aggiunte a quello che fecero i suoi predecessori non scevre neppure di qualche errore; che rispetto alle radici immaginarie il Bombelli ha veramente diritto a illustre lode, ma che il primo a pensarvi e ad operar su di esse fu il Cardano, eseguendone le operazioni principali della moltiplica: che piantate da Bombelli le regole della moltiplica con passo franco si estese per ogni altro modo di operare sopra radici immaginarie, ad esse trasportando quanti mai artifizj si usano, e si usavano già nel calcolo delle radici reali; che il Bombelli si occupò massimamente sulle radici immaginarie cubiche universali, applicando loro con grande copia di esempj qualunque operazione di calcolo, la moltiplica, la divisione, la riduzione di somma e di sottrazione, l' elevazione a potenza, e l' effettive estrazioni di radici; che finalmente al Bombelli debbe l' analisi l' aver posto sott' oc-

(1) Gua-de-Malves.

chio la realtà della formola Tartagliana nel suo intero ad onta delle parti separatamente immaginarie.

La diligente, ed accurata lettura, e lo studio profondo delle opere di questi nostri primi analisti Italiani fecero al nostro Istorico scoprire altre gravi ingiustizie ad essi fatte dagli Storici suoi predecessori, togliendo loro il merito di belle scoperte, o ad altri attribuendo quelle dovute agli Italiani, o d' altre tacendo che per la loro elevatezza, ed importanza di molto onor li ricolmano.

Si disse che nessuno dei nostri primi analisti scoprì l' arte della risoluzione delle equazioni di sesto grado fornite del 3.°, del 4.°, e del 5.° termine. (1)

Che il Vieta fu il primo a scoprire il legame delle equazioni di 3.° grado mancanti del secondo termine con quelle che l'hanno, il primo a far uso delle trasformazioni, il primo a ricorrere alle approssimazioni, e ad applicar l'Algebra alla Geometria, e a costruire geometricamente il valore ritrovato nella risoluzione dei Problemi. (2)

Il nostro Storico ci mostra, che il Cardano alle tante sue belle scoperte analitiche aggiunse anche quella della soluzione delle equazioni di sesto grado fornite del 3.°, del 4.°, e del 5.° termine.

Che il legame tra le equazioni prive del secondo termine con quelle di esso fornite scintillò, siccome egli dice, alla mente di Tartaglia nell' anno 1541, e con pieno fulgore splendette all' intelletto di Cardano, ed a pubblica luce produsse nell' anno 1545. nell' *Arte magna*.

Che non già il Vieta ma il Tartaglia, e il Cardano furono i primi a scoprir l' arte di trasformar l' equazioni, che il Tartaglia trasformò l' equazione di 3.° grado priva del terzo termine in altra priva del secondo; che il Cardano insegnò quattro differenti specie di trasformazioni applicandole alle equazioni di secondo grado, a quelle del terzo, alle trinomie

(1) Montucla.

(2) Wallis, Gua-de-Malves, Montucla.

cubiche, alle trinomie quadrato-quadrate, alle trinomie di 5.° grado, e infine alle quadrinomie del 4.°

Che non già il Vieta ma il Cardano fu il primo a ricorrere alle approssimazioni: ch' egli trovò per approssimazione quanto vuolsi maggiore, la radice irrazionale di una equazione di terzo e quarto grado fosse pur essa di tutti i termini fornita.

Che non già il Vieta ma Frate Luca e il Tartaglia furono i primi ad applicar l' algebra alla geometria. Frate Luca con molte dozzine di Problemi applicò l'analisi non solo di secondo grado, ma la derivativa del 4.° ad ogni specie di figure rettilinee, ed al cerchio, e trenta Problemi geometrici sciolse il Tartaglia tra i quali alcuni di Frate Luca a maggiore estensione recati, e in oltre uno egli ne sciolse algebraicamente poi geometricamente ne costrusse l' equazione finale, e Cardano con l' intersecazione di una parabola e di un' iperbola costrusse l' equazione di terzo grado mancante del 3.° termine, nella quale la somma del primo e del quarto fosse al secondo termine eguale.

Dagli Storici non si fece alcun cenno del merito dei primi analisti Italiani in riguardo alle operazioni sopra i segni del più, e del meno; Frate Luca superò in queste ricerche lo stesso Diofanto, e i suoi interpreti. Il Greco analista considerò la quantità negativa in istato complesso, e dimostrò le regole della moltiplica del meno pel più, e del meno pel meno, e i suoi scoliasti Planude e Xilandro ne dimostrarono le regole geometricamente.

L' analista Italiano considerò il meno su ambidue gli stati complesso e semplice, e in ambidue questi stati dimostrò le regole per la moltiplica del più nel meno, e del meno in più geometricamente, ed algebraicamente. Dalle regole per la moltiplica Frate Luca dedusse le regole per la divisione, ommesse da Diofanto e dai suoi scoliasti, e passa dappoi a quelle della sottrazione, le quali dichiara minutamente distinguendo dodici casi.

Dagli Storici non si fa menzione alcuna nemmeno delle industrie usate dai primi analisti Italiani per abbassare alla sfera delle loro analisi i problemi a primo aspetto appartenenti a sfera più alta, e il nostro Storico ci fa vedere che Leonardo di Pisa usò l' industria chiamata di *posizione eguale* e della più facile ed elegante di *posizione recante a frazioni reciproche;* che il Cardano distinse, e adoperò le due *regole d' aggregato*, tratta la seconda da un frammento di Frate Luca, inventò la posizione per *plus*, et *minus*, proporzionata, la posizione *di regresso*, la posizione *indeterminatamente accresciuta, o indeterminatamente scemata*, la posizione *incrociata*, la *quadrata* la *dipendente;* e ciò che più rileva, queste industrie contengono il germe del gran metodo delle indeterminate.

Fra le tante, e sì luminose scoperte d' algebra dei primi analisti Italiani, non si parla pure dagli storici dei vari metodi di eliminazione da loro adoperati. Frate Luca usò il metodo di trasporto per la eliminazione delle incognite nelle equazioni di 1.° grado, nei casi non più difficili e talvolta per fino nei più complicati mentalmente eseguendo le relative operazioni. Il Cardano insegnò questo metodo, e con elegante speditezza ne fece uso nelle equazioni di secondo grado. Per le equazioni di primo grado Egli insegna il metodo di *paragone*, e quello di *eguagliamento* di termini con la moltiplica reciproca delle equazioni dei termini medesimi.

A questi aggiunse il Cardano un metodo elegantissimo, il quale ad equazioni di qualunque grado a qualunque numero d' incognite può estendersi, purchè queste sieno in continua proporzione geometrica, e sieno le equazioni omogenee, metodo preferibile a qualunque dei metodi moderni ove può usarsi (1).

Al Buteone, ed al Vieta si atrribuisce tutta la gloria della grande scoperta dell' analisi speciosa, e nessuna parte se

---

(1) Cardano lo ebbe da Gabriele degli Amatori, e questi da Frate Luca.

ne dà agli Italiani quantunque gli Italiani ne abbiano al Vieta preparata la via, e i materiali. Nella risoluzione de' Problemi Leonardo di Pisa usa di un metodo che può chiamarsi una specie di analisi speciosa lineare. Frate Luca fece il primo passo da questa speciosa analisi lineare verso la speciosa letterale valendosi delle lettere iniziali delle parole, ed esprimendo con lettere, non già a linee congiunte, ma astratte, le potenze, i mobili, e le velocità. Il Tartaglia insegnar volendo a trovar quanti numeri semplici si vogliono in qualunque siasi data proporzione, rappresenta per $a$, $b$ li due numeri della data proporzione, e successivamente per $c$, $d$, $e$, $f$ i numeri della continua proporzione senza aggiugnere a quelle lettere alcuna linea, ma ad esse medesime l' immediato, e intero ufficio assegnando di rappresentare in modo astratto i numeri. Tracce inoltre di letterale analisi più chiare impresse il Cardano. Nell'*Arte magna* veggonsi quattro questioni, nelle quali le due quantità incognite sono astrattamente segnate per $a$, $b$, ed i loro quadrati, e cubi per altre lettere. Nel libro *de Regula aliza* egli in un indagine sua esprime quattro quantità incognite per quattro lettere; ivi pure esprime il Cardano il numero ultimo termine dell' equazione di 3.° grado, per la lettera $u$, e altrove lo esprime per la lettera $k$, e nella regola proposta nella sua *Arte magna*, e da lui chiamata *regola del modo*, si ravvisa per fino lo spirito della speciosa analisi: *Che mancava ormai più*, conchiude il nostro Storico, che passare dal particolare al generale, piantar un sistema di regolato e universale calcolo per letterali espressioni, e astratti segni i più semplici?

Tale è in compendio la Storia dell' algebra del Cossali. Le disquisizioni di cui volle arrichirla si aggirano principalmente: sull' origine, e sugli inventori dei segni adoperati oggidì nelle analitiche operazioni: sulla moltiplica delle quantità negative, e sulle opinioni del Cardano, del Wolfio, del Venini, del Reim, dell'Agnesi, di Vincenzo Riccati, del Wallis dell' Alembert intorno ai loro prodotti: sulle idee ed espres-

sioni degli antichi, e dei moderni analisti intorno alle omogeneità di grado nelle equazioni. Sulle difficoltà mosse dagli antichi, e dai moderni intorno al significato delle potenze superiori al Cubo, massime nelle equazioni riferite a geometria; sopra le tante e diverse definizioni delle quantità positive, e negative in istato composto, e in istato semplice; sopra l'originale significato, ed uffizio dell' algebra; sopra un' Problema di analisi indeterminata; sui vari metodi di eliminazione, e sopra il componimento di un nuovo; e finalmente sui possibili modi di spezzamento della formola Tartagliana. Anche nelle disquisizioni si appalesa la grande sagacità, la diligenza, e l'acume del loro Autore, nè vi manca mai la utile novità.

La Storia dell'algebra non tardò molto ad esser letta di quà, e di là da' monti, ed a riscuotere grandi applausi. L'Istituto nazionale d' Italia, e di Francia, ch' è quanto dire i dotti più celebri delle due Nazioni, per la voce de' loro Segretarii la dichiararono una Opera, in cui risplende per tutto il grande sapere, la vasta erudizione, la critica luminosa, il giudizio severo, a tal che per le notizie autentiche, e pellegrine, e tratte dall' obblivione, ove giacevano sepolte, l'Autore può aspirare, al vanto dei discopritori del vero. Ma la parte più bella dell'Elogio della Storia del Cossali, vogliam dire la esposizione delle utilità ch' ella produsse, non può attendersi, che dal tempo. Le astruse, e sublimi discussioni istoriche, metafisiche, algebraiche, nelle quali l'Autore a ben trattare l'ampio suo tema fu costretto a impegnarsi in quasi ogni proposito, rendono la sua Storia un' Opera da non poter leggersi nè intendersi, se non da quei pochi, che nei loro studi si propongono la ricerca dell' utile, e della verità. Ad agevolarne, e a renderne comune la lettura sarebbe duopo un compendio dell' Opera, facile, e piano. Possa il saggio imperfetto che io quì ne offersi animar l' algebrista passionato per la scienza sublime ch' egli coltiva, e per l' onor nazionale, ed estenderlo, e perfezionarlo. Rendutasi per tal mezzo

generale, e comune la cognizione di quella Storia non si vedrebbero più, siccome ancor si veggono dopo ventiquattro anni corsi della pubblicazione di quel' Opera, nelle opere elementari, e nelle scuole d'analisi insegnati gli errori delle vecchie storie, taciuti i nomi dei benemeriti Italiani discopritori delle principali analitiche dottrine, ed attribuirsi agli stranieri i ritrovati algebrici ai nostri dovuti. A questi ultimi allora, ed alla verità tributato verrebbe il meritato onore e quindi sarebbe compiuto l' Elogio della Storia del nostro Accademico.

Chi non ignorasse il tempo e le fatiche, che spendere dovea il Cossali nel comporre, ed ordinar la sua Storia, farebbe certamente le maraviglie, ch' egli non ancor giunto al termine di essa aver potesse comodo, e lena d' intraprendere un altro lavoro importante, e molto applaudito, ed istruttivo. Egli compose dal 1791, fino al 1804 le Effemeridi Astronomiche per la latitudine, e longitudine di Parma. In queste egli non si restrinse a predire, e a determinare il tempo della apparizione, e della durata degli svariati fenomeni che il Cielo presenta ogni giorno agli occhi di tutti; ma volle pur anco di essi, e di quelli pure che solo coi più squisiti stromenti, e colla assiduità degli osservatori più diligenti si discoprirono, darne una spiegazione atta ad essere intesa da molti, cioè non solo da chiunque è fornito delle elementari cognizioni geometriche, ma in qualche modo da tutti, *aciocchè tutti imparino*, egli dice, *quanto ne sono capaci ad intendere, quella lingua colla quale i Cieli narrano le glorie dell'Onnipossente.*

Nella spiegazione di quei fenomeni, e nell' adattarla al comune intendimento mostra il Cossali una tale estensione di dottrine Astronomiche e tanta sagacità, che un cel. Astronomo giunse a chiamarlo *Signore del Cielo.*

Ma d' altri ancora importanti, ed utili argomenti gli piacque adornare le sue Effemeridi. In quella dell' anno 1793. descrive una sfera armillare ch' egli immaginò più facile, più

accurata, più dilettevole, e proficua per l' insegnamento della posizione, e del moto degli astri.

Nella Effemeride del 1803. il Cossali espone, confronta, discute le molte osservazioni, combinazioni, ipotesi, correzioni, calcoli dei cel. Astronomi Piazzi, ed Olbers per determinare le orbite, la luce, e la grandezza dei nuovi pianeti Cerere, e Pallade da loro scoperti, e per molti penosissimi calcoli segnando i gradi, ed i limiti di certezza entro i quali fino a tutto il 1802. tener poteansi quelle ricerche. Egli aprì agli Astronomi e agevolò il cammino da battersi per ridurle nel più breve tempo, e colla massima esattezza alla loro perfezione. Finalmente nell' Effemeride per l'anno 1804. egli discute la questione insorta tra quelli, i quali credevano che l'Ecclissi prenunciato pel giorno 11. Febbrajo del 1804, del quale il massimo colmo per Parma esser dovea pei suoi calcoli di 11. $\frac{1}{2}$ digiti, avesse a portar tetra notte. Alcuni Ecclissi accaddero già di quasi eguale ed anche di maggiore grandezza, ma dell'Ecclissi soltanto osservato in Marly dal Cassini nel dì 3. Maggio del 1715. si notò il grado di oscurità. Essa fu tale che nel suo colmo si viddero svolazzar pipistrelli, e alcuni uccelli cercar ritiro non altrimenti se principiar dovesse la notte, e Venere inoltre si vidde ad occhio nudo, e debolmente Mercurio. Pure da ciò non potevasi giustamente inferire, che eguale effetto produr dovesse l' Ecclissi predetta pel dì 11. Febbrajo 1804, quantunque di poco minore esser dovesse di quello osservato in Marly. All' occhio astronomico del nostro Accademico nessuna isfuggì di quelle molte circostanze, per le quali due Ecclissi, comunque di eguale grandezza, produr non potrebbero tuttavia eguale oscurità. Egli comprese che a determinare i gradi di oscurità di tali Ecclissi era duopo investigare la forza della rimanente luce residua, che questo era un Problema, del quale gli astronomi calcolatori di Ecclissi non si erano giammai occupati; che più di astronomia un Problema egli era di alta Geometria e di ottica sublime; che neppure le opere più sottili, ed elevate a lui

note di queste due scienze il comprendono, che un tale Problema obbliga a nulla meno che a computare la luce da una qualunque particella della superficie dell' Emisfero solare emanante, e raccogliere in una somma le luci tutte delle infinite particelle costituenti l' intero solare emisfero, di poi un simile calcolo istituire per quella porzione di esso serrata tra un arco del lembo, ed una curva di doppia curvatura sopra la superficie dell' emisfero descritta. Malgrado di tante difficoltà il Cossali si accinse alla risoluzione del Problema, piantò le formole generali, ed applicandole sì al futuro ecclissi per Parma, come all' ecclissi succeduto a Marly, trovò la forza d' illuminazione della parte scoperta dell' emisfero solare nel colmo dell' Ecclissi di Marly, alla forza d' illuminazione della parte scoperta nel colmo dell' Ecclissi di Parma nella proporzione di 110 a 105, conchiuse che quando il Cielo fosse egualmente sereno si avrebbe in Parma nel colmo dell' Ecclissi un grado di oscurità anzi che nò maggiore di quello, che si ebbe in Marly, non già la tetra notte, siccome alcuni eransi dati a credere.

Nel posto di Professore d' Idraulica e nelle relative commissioni ch' ebbe il Cossali dal Sovrano, dal Pubblico, e dai particolari egli si palesò anche valentissimo Idraulico, siccome ne fanno fede gli scrittti o inediti, o stampati ch' egli stese intorno alle commissioni medesime.

Nell' anno 1802. Parma avendo perduto il suo Duca Ferdinando I. Borbone, entrò ad amministrare quegli stati Moreau — de — Saint Mery, già da due anni Ambasciatore della Repubblica Francese a quella Corte. Grande estimatore, siccome egli era del Cossali, lo volle mantenere nelle Cattedre che con tanto onore della Parmense Università occupava già da 15. anni. Tuttavia mal soffrendo il Cossali la perdita del Principe suo protettore ed amico, e le molestie che le proprie opinioni, e il franco, e leale suo carattere gli procacciarono, risolse di abbandonare quegli impieghi, e quella Città, e nel 1805. ritornò alla sua Verona.

Questa illustre sua Patria, sempre intesa ad onorare il merito de' propri figli, e perfezionare i suoi letterarj Istituti, elesse il Cossali Professore di matematiche sublimi nel suo fiorente Liceo, e consultore Idraulico nel magistrato, che presiedeva al Governo dei fiumi, e de' canali del suo Territorio. Nell' anno susseguente fu dal Governo Italico nominato Ispettore Generale d' acque e strade, incarico che per la divisa, e per le insegne ch'egli avrebbe dovuto vestire non fu da lui riputato conveniente al suo carattere di Sacerdote e di Teatino. Assunse invece l' altro egualmente importante, e luminoso, al quale dal governo Italico fu pure nell' anno stesso nominato, cioè quello della Commissione Idraulica composta di sette membri ordinata dall' Imperator Napoleone per l' esame da istituirsi in Padova dei progetti fino a quel tempo proposti senza effetto sul regolamento del fiume Brenta. Egli assistette col suo zelo, e colle sue Idrauliche cognizioni senza interruzione, quantunque convalescente di grave malattia a tutte le adunanze destinate all' esame di quei progetti, e coraggiosamente intraprese le visite al Brenta, e ai fiumi che col Brenta aver potevano relazione; assistette alle livellazioni, e a tutte le operazioni e osservazioni necessarie per venire a un ben fondato esame. Pure di tante fatiche del Cossali, e de' suoi colleghi, non si potè cogliere il frutto per quelle cause, che sarebbe inutile il rammentare.

Nello stesso anno 1806. l'Imperatore Napoleone chiamò il Cossali alla Cattedra di calcolo sublime nella Università di Padova, nè in questo posto fu minore lo zelo di lui pei progressi della sua favorita analisi e per l' onore della Università; oltre le non interrotte lezioni, che con molto profitto dei giovani allievi egli diede recitò dalla Cattedra parecchi discorsi diretti a destare negli animi degli ascoltatori stima, e rispetto per le matematiche Scienze ch' ei professava. Tra quei dotti discorsi nella Storia dei suoi studj rammentare si debbono gli Elogi, che nei giorni solenni della Università recitò dello Stellini, del Poleni, e del Lagrange. Obbediente al

precetto, che gli Elogi dei Letterati, e dei Dotti esser debbono la storia delle loro Opere, l'esposizione ragionata ch'egli fece di quelle dei tre sommi uomini, mostrò quanto fosse il Cossali ricco di sapere in Metafisica, in Morale, in Fisica, in Idraulica, in Nautica, in Architettura nella Critica; e quanto finalmente fosse istrutto delle tante sublimi scoperte matematiche che sì grandemente onorano il secolo decimo ottavo.

Nel 1808. L'Accademia di Scienze, Lettere, ed Arti di Padova nominò il Cossali uno dei suoi trenta socj attivi, e nel 1811. l'Imperatore Napoleone entrare il fece tra i sessanta membri pensionati del Nazionale Istituto Italiano.

All'Accademia recitò parecchie dissertazioni tutte piene del suo zelo rivolto a togliere gli errori, ed accrescere il numero delle utili, e importanti verità. Tale fra le altre è quella sopra la natura delle equazioni che l'Accademia inserì nel primo Tomo dei suoi *nuovi Saggi scientifici*, e *letterarj*. Dopo di aver messo nel loro pieno lume i già noti principj della metafisica di quella Teorica, gli adopera il Cossali a dimostrare la fallaccia di alcune Dottrine, che intorno alle equazioni pubblicarono i celebri matematici Frisi, e Nicolai.

Adorno dei pregi di utile erudizione e dottrina è pure il discorso recitato in una delle adunanze dell'Istituto che pubblicollo nel secondo Volume delle sue nuove Memorie. In quel discorso vedesi chiaramente che i tre grandiosi penelli sulla riva di Piacenza non sono idea del solo Guglielmini e nè tampoco sono tutti di cotto, siccome credeva il cel. Frisi, ma bensì proposti come riparo alle corrosioni del Pò dal Gesuita Macrini e dal Guglielmini, e fabbricati di prismi di smalto fatto di ghiaja e di calcina viva. Scorgesi ancora non esser possibile od almeno utile il progetto del Lorgna di ricondurre il Pò nella Trebbia e finalmente si vede che la portata del Pò in un anno trovata dal Cossali di piedi cubici Parigini 2, 842549, 015241 deesi ritener più sicura ed esatta della portata di piedi cubici Parigini 1, 268855, 646947 cal-

colata dal Padre Riccioli, ed abbracciata dal Buffon nel computare la quantità d' acqua che l' Oceano riceve dai fiumi, e più accurata anche di quella di piedi cubici Parigini 2, 384708, 101866 rinvenuta dal cel. Zendrini.

Fino dall' anno 1793. fu il Cossali eletto ad uno dei Quaranta Membri della Società Italiana delle Scienze; ed in mezzo ai gravissimi incarichi da lui sostenuti in Parma, in Verona, ed in Padova seppe pur corrispondere generosamente ai doveri che quella Società impone ai suoi membri; tra quali essendovi pur l' obbligo di trasmetterle almeno ad ogni quattro di que' volumi che essa va pubblicando, qualche lavoro rivolto all' ingrandimento, ed alla perfezione della Fisica, e delle Matematiche, il Cossali non ne lasciava uscire quasi nessun volume, che non fosse de' suoi lavori arricchito.

Il Tomo X. (1802) contiene la sua bella Dissertazione *sopra la tensione delle funi*. Il Leibnizio, e i due grandi Bernoulli Giacomo e Giovanni avevano già col soccorso del calcolo infinitesimale da quello inventato e da questi promosso ed ampliato, determinata la natura della Curva, nella quale si conforma una catena, od una fune appesa nelle sue estremità a due punti fissi, e dal primo erasi calcolato anche lo sforzo della catena contro i due punti di sospensione; ma da altro cel. Matematico, l' Ab. Frisi fu accusato d' imperfezione e di errore il valore della spinta ritrovato da Giovanni, e ad esso sostituito un altro che il Frisi medesimo pretese per più esatto. Nella sua scrittura il Cossali dilucida pienamente per via di riflessioni, e fermamente assoda per via di sperimenti la Bernoulliana Teorica, ed abbatte per ambidue i modi quella recata dal Frisi, traendo perfino dalle censure di lui molte ragioni a favore della prima.

Nel Tomo XIII. (1806) ha del Cossali la dotta *disquizione matematica sulla opinione delle pioggie de' sassi dai vulcani lunari*. Dappoichè il sommo Geometra de-la-Place pronunciò essere fisicamente possibile, che i vulcani lunari slancino sassi fino alla terra, molti cel. Fisici, e Matematici opina-

rono, che la causa, e l' origine della caduta de' sassi per l' atmosfera terrestre, osservata già dalla più rimota antichità, e pienamente verificata nei nostri tempi, si dovesse appunto attribuire ai vulcani della Luna. Il celebratissimo Fisico Vauquelin tra gli altri, dopo di avere esaminate le estrinseche qualità, e con sottile analisi rintracciati i componenti dei sassi caduti nei contorni dell'Aquila in Francia, dichiarò l' opinione, che li fa venire dalla Luna per lo meno irragionevole, e se non possano darsene prove dirette non potersi nemmeno opporre in contrario un ben fondato ragionamento. L' esame di questi giudizj del Vauquelin impegnò il talento investigatore del nostro Accademico, ma per istituirlo sopra buoni principj egli conobbe necessario il valutar prima la velocità colla quale il vulcano lunare dovrebbe lanciare il sasso, onde giunger potesse fino alla terra; la velocità che avrebbe il sasso arrivato alla superficie terrestre, e finalmente il tempo che il sasso impiegherebbe nel trascorrere lo spazio dalla Luna alla terra.

Nella sua disquisizione matematica presenta il Cossali le soluzioni dei tre Problemi, le quali per la maggior precisione del metodo, e la ragionevolezza delle ipotesi a cui egli è pur forza ricorrere in sì fatte investigazioni, considerar si vorranno più sicure, ed esatte di quelle che prima erano state date dai cel. Matematici Olbers, Poisson, Biot, e da un Geometra Inglese. Solamente confesseremo che la risoluzione del tempo recata dal nostro Cossali fu vinta nell' eleganza da quella del Poisson. Il Poisson integrando col breve ed elegante metodo delle trascendenti circolari l' equazione differenziale del tempo giunse per cammino brevissimo alla determinazione del tempo medesimo. La brevità stessa ottener poteva il Cossali integrando col metodo delle trascendenti ellittiche l' equazione differenziale suddetta, ma avendo egli voluto integrarla sviluppandola in serie, s' immerse in un calcolo scabrosissimo, ed oltre modo prolisso. Ciò però non gli tolse di pervenire ad un risultato presso che eguale a quel-

lo a cui giunse il Poisson. Oltre di che dal calcolo del Cossali trar si possono nuove prove della sua sagacità per gli ingegnosi tentativi, e pei sottili artifizj, ch' egli impiegò onde giungere per la via ch' egli tenne alla integrazione. Poteva spiccare del pari l' ingegno del nostro Autore nella seconda parte della sua dissertazione, voglio dire nell' applicazione dei suoi Problemi all'esame della opinione del Vauquelin. Ma sia che occupato fosse in ricerche da lui credute di maggiore importanza, sia che le spiegazioni date da poi dai cel. Fisici del fenomeno delle pietre cadenti, sembrate gli fossero bastanti ad abbattere l' opinione del Vauquelin; egli è certo che il Cossali non ritornò più su questo argomento.

Nel Tomo XV. (1809) egli pubblicò due Dissertazioni. Tratta la prima *dei Barometri Luminosi*. Con nuovi accuratissimi sperimenti il Cossali assicura la giustezza della opinione da tutti i moderni fisici ricevuta, che gli sprizzi di luce slanciantisi dal Barometro, massimamente dalla sua parte superiore, quando all'oscuro si scuote, sono una cosa stessa della luce Elettrica scoppiata dallo stropiccio che fa contro il vetro il Mercurio oscillante. A rendere vieppiù utili que' suoi sperimenti egli passa a mostrare, come per essi render si possano più giuste, e più generali le regole suggerite dai Fisici per giudicare della perfezione, o imperfezione de' Barometri.

La seconda Dissertazione è intitolata: *Indagini per sottomettere a calcolo il Barometro nelle diverse sue forme, nelle sue dipendenze, e nei suoi usi.* Nessuno aveva ancora determinate le formole del movimento delle due superficie superiore, ed inferiore del mercurio nel Barometro diritto, e inflesso Torricelliano, qualunque siasi la figura e grandezza del vaso. Il Cossali ivi stabilisce quelle formole, le quali conducono direttamente alla cognizione della figura, e grandezza tra le più picciole, colle quali deesi costruire il vaso, e a quale distanza dal fondo del vaso nel Barometro diritto esser debba immerso il cannello, affinchè avuto riguardo così elle differenti pressioni atmosferiche, come al variar del calore

si possa, nel misurare l' altezza della colonna mercuriale, non tener conto dell' alzamento, o abbassamento della superficie del Mercurio in ciascuno dei due vasi. A questa ricerca altra ne aggiunse il Cossali d' un' argomento, che dovrà certo tenersi di maggiore importanza. Non si può, come è noto, determinare l' altezza del Mercurio dovuta alla sola pressione dell' atmosfera se non si sa quanto dall' altezza osservata si debba sottrarre, o ad essa aggiungere per cagione della diversità del caldo e del freddo. A tale oggetto da celebri Fisici s' istituirono diverse sperienze. Muschembroeck, Boerhaave, Martine, Cristine, Schueburg, Lorgna, e il Padre da S. Martino determinando il dilatamento di un dato volume di Mercurio per un dato grado di calore; il Delue ponendo il Barometro in un Gabinetto a due diverse temperature; e finalmente il Professor Carbois, Gaux, Rocheblare immergendo il Barometro nel ghiaccio fondentesi, poscia nell' acqua bollente.

Esaminate accuratamente dal nostro Accademico queste sperienze non seppe trovarne alcuna, la quale lasciar non dovesse qualche dubbio intorno alla esattezza de' loro risultamenti.

Quelle di 1.° genere per non essersi in esse considerata la pressione dell' aria atmosferica fuor che nelle sperienze del Lorgna, e del P. da S. Martino, ma senza avvertire che farsi dovevano sotto la stessa pressione atmosferica; l' esperienze del secondo genere, perchè quantunque istituite dal De-Luc sotto la stessa pressione di 27. pollici, porgono risultamenti assai discordi da quelli di altre sperienze dallo stesso De-Luc eseguite; quelle infine del 3.°, perchè s' ignorano affatto le circostanze e le condizioni nelle quali furono fatte dal Carbois, e dal Gaux, e perchè quelle del Rocheblare discordano dalle sperienze del De-Luc, del Lorgna, e del P. da S. Martino.

Ad ottenere malgrado di questi difetti conclusioni alle verità più conformi, il Cossali ridusse sotto la stessa pressione le sperienze dei due Fisici Italiani, e ritrovò che la variazione barometrica di 27. pollici dallo zero ai gradi 80. es-

sere dovrebbe di linee 5,131127 per l'esperienze del Lorgna, di linee, 5,105767. per quelle del P. da S. Martino.

Temendo poi che i risultamenti delle sperienze del De-Luc non concordassero con quelli d'altre sue proprie, perchè l'aria del Gabinetto nel quale si fecero non avesse libertà sufficiente di espandersi per l'aumentato calore, le volle il Cossali ripetere per ben due volte con finestre aperte, e in stanza più ampia, e rinvenne la variazione barometrica di 27. pollici ascendente a linee 5,17498 salendo il Termometro dai gradi 14. fino ai 59. e di linee 5,16417. salendo dai gradi di 12 $\frac{1}{2}$. fino ai 44.

Convinto finalmente il nostro Accademico, che la discrepanza delle sperienze di Rocheblare da quelle del De-Luc, del Lorgna e del P. da S. Martino attribuire si dovesse ad alcuni intrinseci difetti degli artifici usati dal Rocheblare, egli suggerì un nuovo metodo d'istituirle, il quale levando il difetto del metodo di Rocheblare sperar si potesse fondatamente di ottenere risultati più sicuri, ed esatti.

Il Cossali corona la sua Dissertazione con una formola algebrica, dalla quale, data la variazione cagionata nella colonna del Mercurio dalla temperatura del ghiaccio all'acqua bollente sotto la pressione atmosferica di 27. pollici, possa inferirsi quella per ogni temperatura e sotto qualunque pressione.

Nel Tomo XVI. trovansi altre due Dissertazioni del nostro Accademico. La prima intitolata *Dei baratti mercantili ridotti, e dimostrati per Algebra.* Quaranta otto di questi Problemi furono trattati nella *Somma* di Frate Luca, e quarantatre dal Tartaglia con dati particolari e numerici. Avendoli il Cossali risolti tutti con simboli algebrici, si accorse che il principio fondamentale per sciogliere il Problema dei baratti consisteva in due equazioni ch'egli determina, e chiama la prima *di contanti*, l'altra di *baratto*. Con queste due equazioni risolve undici Problemi sui baratti, e per esse di-

mostra la fallacia di alcune soluzioni di Frate Luca, e del Tartaglia.

La seconda Dissertazione è intitolata: *Disquisizioni sui varj metodi di eliminazione con il componimento di un nuovo*. Ella è la stessa di quella che abbiamo accennata nella esposizione della storia dell'algebra. Piacque certamente al Cossali di vederla ristampata negli atti della Società Italiana delle Scienze onde renderne più generale la lettura meritevole, come ella è, pei tanti pregi che l'adornano, di andare nel le mani di tutti.

Dopo Frate Luca e il Cardano ci lasciarono metodi di eliminazione il Newton, l'Eulero, il Bezout, il D'Alembert, il Cramer il De-La-Grange. Quelli dei quattro primi sopra lodati Geometri portano l'equazione finale di eliminamento elevata oltre il dovere per cagione di certi fattori, che ne alterano, ed aumentano il grado.

Il metodo che gode il pregio di andare immune di fattori altrettanti è quello che chiamasi di *prodotto*, del quale Eulero piantò i fondamenti, e che Cramer, e la Grange hanno a miglior condizione elevato. Ma il Cramer fece desiderare una generale dimostrazione del suo calcolo, e il La Grange assoggettò il suo alle differenze infinitesime, e ai logaritmi. Nella sua Dissertazione il Cossali si accinge a perfezionare il metodo dell' Eulero, e del Cramer formando un solo composto dei metodi d' ambidue. A ciò si fa strada coi bei Teoremi del Newton, e del Waring sopra la relazione delle varie funzioni delle radici coi coefficienti delle equazioni, supplisce alle mancanze del metodo dell' Eulero, rende generale quello del Cramer, semplifica il calcolo del La-Grange trasferendolo dalla dipendenza delle infinitesime differenze, e dei logaritmi alla unica dipendenza dei suddetti Teoremi.

Il XVII. Tomo (1814) contiene una soluzione del nostro Accademico del problema della capacità della Botte, più generale di quella che diedero prima di lui i cel. Matematici Italiani che su questo argomento si occuparono.

Il Tomo XVIII (1815) offre altri due scritti nel primo dei quali il Cossali esamina, illustra e corregge le sperienze con cui i cel. Fisici Camus, Changeux, Marat, Landriani, e Moscati tentarono di determinare le variazioni che nel Barometro può cagionare la elettricità. Nel secondo dimostra, come seguendo i principj coi quali il cel. Astronomo Antonio Cagnoli fu il primo ad assegnare direttamente nelle orbite elittiche i luoghi delle stazioni, sciogliere si potea l' altro più universale delle geometriche apparenze.

Tale è la storia comunque informe, e imperfetta dei lavori scientifici del Cossali. L' esposizione in prosa, e in versi di alcuni suoi pensieri sopra parecchi argomenti d' arti, d' Istoria, di Erudizione, di Morale, e di Fisica era il solazzo ch' egli prendeva in mezzo a tante fatiche. Alcuni di questi pensieri viddero la pubblica luce per impulso de' suoi amici. Tra questi vuolsi annoverare una lettera al cel. Cav. Ippolito Pindemonte sul bello, un discorso sopra un passo degli Asolani del Bembo, un picciolo opuscolo sulla confusione di due cellani Arabi in un solo; e parecchi sonetti sopra argomenti fisici, sacri, e morali.

La forte complessione del Cossali poteva serbarlo ad altri lavori; ma i tanti già fatti, e la intensione di mente, e l' ardore con cui vi si applicava, e le gravi malattie le quali a quando a quando lo affligevano, debilitarono il suo temperamento sì fattamente da non poter più resistere agli assalti, che davagli al petto un umore gottoso, che egli portò fino dalla nascita. Egli sentì il pericolo che lo minacciava; chiese i soccorsi della Religione, e li ricevette colla presenza di spirito, e colla tranquillità del buon cristiano e del saggio. Noi lo perdemmo il dì 20. Dicembre del 1815. nella età di circa sessanta sette anni. Le sue spoglie mortali furono portate con modesta pompa alla Chiesa degli Ogni Santi accompagnate dai Sacerdoti di quella Parrocchia, dai Professori, e dagli Alunni dell' I. R. Università, e la mesta funzione si chiuse con una orazione funebre recitata, conforme l' uso, da un Pro-

fessore della facoltà Matematica (*a*). Le novelle pubbliche annunciarono la morte del Cossali come una grave perdita per le scienze, e per le Accademie che lo ebbero a socio, e compagno.

Tutti i Dotti la ricordarono con trista commozione, e rammarico. Dolente sopra tutti Verona che lo vide nascere, e lo nudrì nei primi studj, ed emula a un tempo delle Greche antiche Città nell' onorare, e perpetuare il nome dei preclari suoi Cittadini, volle innalzato al Cossali un monumento che

---

(*a*) Il Sig. Dott. Gio. Farini. Alla Porta maggiore del Tempio leggevasi la seguente Epigrafe composta dal chiar. Sig. Professore Floriano Caldani.

PETRO . COSSALIO . V. C.

DOMO . VERONA
INTER . CLER . REG . THEAT . SACERDOTI
SACRIS . CONCIONIBVS . PER . ITALIAM . PROBATISSIMO
QVI . ACERRIMO . INGENIO . FIRMO . ANIMO
OMNIGENA . ERVDITIONE . PRAESTANS
HYDRAVLICAM . ASTRORVM . ET . METEOR . DOCTRINAM
IN . PARMENSI . VNIVERSITATE
SVBLIMIOREM . MATHESIN . IN . PATRIA
DEIN . IN . ARCHIGYMNASIO . PATAVINO
PVBLICE . TRADIDIT . EDITIS . SCRIPTIS . EXPLANAVIT
SODALIS . REG . INSTITVTI . ITALICI
$\overline{XL}$ . VIR . SOCIETATIS . ITALICAE . SCIENTIARVM
IMPIGER . VIXIT . ANNOS . $\overline{LXVII}$.
DECESSIT . $\overline{XIII}$ . KAL . JANVAR . ANNO . $\overline{MDCCCXV}$.
DIE . TRIGESIMA . AB . EXCESSV . EIVS
MOESTISSIMI . NEPOTES
PATRVO . OPTIMO . FVNVS . INSTAVRANT.

tramandasse a posteri la sua immagine, e la memoria delle virtù del suo ingegno. (*b*)

Era il Cossali di alta e ben proporzionata statura. Tutto robusto e distinto dal comune degli uomini nella fronte spaziosa, e sporta sensibilmente in fuori. La sua fisonomia ora lieta ed aggradevole, or grave e pensosa, e qualche volta melanconica, ma sempre espressiva. Forte, e immaginoso il suo stile, ma perchè troppo fervido non di rado inesatto.

Nelle conversazioni ameno e vivace, quantunque abituato a studj profondi e severi, istrutivo per la grande sua lettura de' libri d' ogni argomento, e per la sua vasta memoria. Si esprimeva bene, raccontava con precisione, e rapidità. Franco con tutti, semplice e dignitoso coi grandi e coi Principi co' quali ebbe a parlare. Libero da ogni invidia encomiava gli uomini di vero merito fossero anche vivi, e vicini, fossero pure suoi Colleghi nelle Università, o nelle Accademie. Era passionato sì vivamente pei grand' uomini che celebrava, e sì ansiosamente desideroso di trasfonderne la stima, e l' ammirazione nella mente e nel cuore de' suoi Uditori, che nella lettura de' suoi discorsi Accademici e negli Elogj pigliava alle volte un' enfasi tale da risentirsene spesso la sua salute. Fornito di squisita sensibilità, e tenero sopra modo del

---

(*b*) Gli fu nella Chiesa di S. Anastasia collocato per decreto della Città di Verona un Busto sotto il quale si legge questa Iscrizione.

PETRO . COSSALIO
TIIIEN . ORD . SACERD.
IN. SOC. ITAL. XL. VIR. ET. R. SCIENT. INST. ADLECTO
MATHEMATICIS . DISCIPLINIS . ADPRIME . CLARO
QVAS . VERONAE . PARMAE . ET . PATAVJ
MAGNA . SVI . NOMINIS . LAVDE . APVD . ITALOS . EXTEROSQ.
PVBLICE . PROFESSVS . EST
IIERMAN . PATRIA . LVGENS . POS . B. M.
AETERNVM . IN . CIVES . VIRTVTIS . EXEMPLVM
VIX . ANN. LXVII P. M. OB. A. S. MDCCCXV.

giusto, del vero, del bello, parve a taluni ch' egli non sempre osservasse nel difenderli quella moderazione, tanto raccomandata dalla presente nostra sociale urbanità, e dalla tolleranza letteraria, le quali però sovente altro non sono che una dissimulazione viziosa. Giusto egli stesso, grato, benefico in tutta la sua vita lasciò alla sua famiglia la discreta sostanza acquistata coi risparmj del superfluo, e col tesoro della temperanza.

All' egregio suo Discepolo Floriano Pasetti lasciò della sua ricca, e varia Biblioteca quella porzione, sopra ogni altra copiosa, che comprendeva i libri di Matematica, Fisica, ed Astronomia; l' altra ordinò che fosse distribuita ai parenti ed agli amici; nè de' poveri si scordò, quantunque in vita da lui continuamente soccorsi. I suoi parenti, gli amici, ed i poveri, e tutte le anime gentili, amanti delle lettere, e delle virtù, e della verace gloria d'Italia serberanno viva mai sempre la memoria di Pietro Cossali.

# MEMORIE
## DI
# MATEMATICA

SULL' EQUILIBRIO DELLE CURVE A DOPPIA CURVATURA RIGIDE, OVVERO COMPLETAMENTE O SOLO IN PARTE ELASTICHE.

# MEMORIA

DEL PROFESSORE ANTONIO BORDONI

*Ricevuta adì* 22. *Maggio* 1818.

1.

I movimenti relativi, che possono avere luogo fra le parti di una curva a doppia curvatura, richieggono un' allungamento od un' accorciamento degli elementi di essa, od una aumentazione o diminuzione degli angoli di contingenza compresi fra i suoi elementi consecutivi, ovvero una simile variazione degli angoli diedri dei prossimi piani osculatori, o due o tutte insieme queste tre variazioni; dimò che, se saranno invariabili gli elementi della curva e con essi anche i due angoli anzidetti ossia le due sue flessioni, la curva si potrà porre bensì in più luoghi dello spazio, ma essa avrà sempre la medesima figura.

Applicando opportunamente delle forze ad una curva fisica, si possono produrre delle variazioni sì nei suoi elementi che nelle sue flessioni; e producendo effettivamente queste variazioni in siffatte linee, si sente una resistenza ossia una forza naturale, che si oppone ad esse variazioni, la qua-

le resistenza dicesi comunemente elasticità della curva .

I meccanici suppongono questa resistenza costituita di tre parti distinte, cioè della parte proveniente dalla variazione dei soli elementi della curva, e delle due che provengono dalle variazioni delle due flessioni di essa; e chiamano particolarmente, *tensione* la prima di queste parti, *elasticità* la seconda, che è prodotta dalla aumentazione o diminuzione naturale della prima flessione ossia degli angoli della contingenza ordinaria; *torsione* dicono la terza, la quale nasce dalla variazione della seconda flessione ossia degli angoli compresi fra i consecutivi piani osculatori .

Sebbene le tre variazioni anzidette abbiano luogo generalmente in tutte le curve fisiche alle quali sianvi applicate delle forze , non ostante, in molte occasioni interessa anche la cognizione di ciò, che avviene o può avvenire nello stato di equilibrio di quelle curve, la cui figura è supposta affatto affatto invariabile, le quali si dicono per questo *curve rigide;* come *elastiche completamente* si dicono quelle, nelle quali possono avere luogo le variazioni suddette, ed *elastiche solo in parte* le altre .

Nelle curve rigide, per tensione , elasticità , e torsione si intendono gli sforzi , che le forze esteriori fanno per variare, benchè in vano, gli elementi della curva o le due sue flessioni .

2.

Le cose principali, che si hanno di mira nell' equilibrio delle curve a doppia curvatura , sono , le forze esteriori , la tensione , la elasticità , la torsione , e le equazioni di esse curve ; cosicchè tutti i dati delle quistioni relative allo stato di equilibrio delle curve consistono in alcune di queste cose ed i quesiti nelle altre . E di fatto, la quistione principale per le curve rigide è quella , nella quale sono conosciute le forze esteriori e le equazioni della curva in una data posizione, e si dimandano la tensione , la elasticità , la

torsione, e con esse anco le due equazioni individuate della medesima linea nello stato di equilibrio; e per le elastiche completamente è quella, in cui sono date le forze esteriori, le leggi della tensione, della elasticità, e della torsione, e si cercano le equazioni rappresentanti la curva nel suo stato o posizione di equilibrio, ed i valori delle medesime tre forze interiori, cioè della tensione, della elasticità, e della torsione. Anzi, la soluzione completa di qualunque quistione relativa all' equilibrio delle curve a doppia curvatura richiede generalmente la conoscenza delle medesime tre equazioni indefinite, nelle quali, come si vedrà, vi sono le forze esteriori, le interiori ossia la tensione, la elasticità, e la torsione, e con esse anco le coordinate della curva.

Lagrange, nella sua Meccanica Analitica, parlando dell' equilibrio delle curve rigide, trova tre equazioni indefinite fra le forze esteriori, le coordinate della curva e tre altre quantità, le quali quantità sono le grandezze di tre forze, che, agendo secondo determinate direzioni, equivalgono allo sforzo che fanno le forze esteriori per cambiare la figura alla curva stessa; ma cavando i valori di queste quantità dalle medesime tre equazioni di Lagrange, si trova che due di esse sono infinite.

Il Sig. Binet Jacques, il primo che dilucidò questo passo della Meccanica di Lagrange, con una Memoria inserita nel tomo decimo del giornale della scuola politecnica di Francia, scrivendo altrimenti la invariabilità della curva, trovò tre altre equazioni indefinite, nelle quali vi sono oltre le forze esteriori e le coordinate della curva, tre nuove quantità atte a misurare, una la vera tensione, l'altra la elasticità, e la terza la torsione; e desunse anche da queste equazioni quella espressione delle forze esteriori, che rappresenta la torsione; ma per rispetto alla tensione ed alla elasticità dichiarò, che „ On ne parvient aux valeurs génêrales de tension et d'élasticité que par des calculs pénibles, dont les résultats paraissent fort compliqués „.

In questa breve Memoria, nella quale si parla dell' equilibrio delle curve a doppia curvatura siano rigide, o siano elastiche completamente o solo in parte, si troveranno tre equazioni indefinite fra le coordinate della curva nella posizione di equilibrio, le forze esteriori, la tensione, la elasticità, e la torsione, colle quali si otterranno con facilità, mediante alcuni stratagemmi, queste ultime tre quantità, cioè la tensione, la elasticità, ed anche la torsione espresse tutte colle forze esteriori e le coordinate della curva nella posizione di equilibrio di esso.

3.

Denominerò $x, y, z$ le tre coordinate rettangole di un punto qualunque della curva in equilibrio; $s$ l'arco ed $m$ la massa corrispondente; $de$, differenziale della quantità variabile $e$, l' angolo di contingenza della stessa curva cioè l' angolo acuto compreso fra l' elemento $ds$ ed il suo seguente; $di$, differenziale di un' altra quantità variabile $i$, l' angolo acuto compreso fra due prossimi piani osculatori della medesima curva, vale a dire l'angolo compreso fra i due piani osculatori che passano, uno per l'elemento $ds$ ed il suo seguente, e l'altro per quest' ultimo medesimo elemento e pel seguente di esso: più prevengo, che, dicendo tangente, piano osculatore della curva, intenderò sempre, se non avvertirò altrimenti, quella tangente, quel piano osculatore corrispondenti al punto le cui ordinate sono $x, y, z$.

Qualunque sia la curva, cioè sia dessa elastica completamente o solo in parte, ovvero rigida, chiamerò $\lambda$, $\mu$, $\xi$ le tre forze equivalenti immediatamente alle tre differenti elasticità od invariabilità dei differenziali $ds$, $de$, $di$; cioè chiamerò $\lambda$ la tensione, $\mu$ la elasticità, e $\xi$ la torsione: e supporrò ciascuna forza esteriore ed applicata alla curva, decomposta in tre parallele ai tre assi delle coordinate e tendenti a diminuire le coordinate stesse; e nominerò X la somma di quelle fra queste componenti, le quali oltre di esse-

re parallele all' asse delle $x$, provengono dalla scomposizione delle singole forze esteriori agenti sul punto a cui corrispondono le coordinate $x, y, z$; ed Y, e Z le analoghe somme per quelle parallele agli assi delle altre ordinate $y, z$.

4.

Prescindendo dalle forze particolari, che possono essere applicate ai termini della curva, la somma dei momenti virtuali delle forze agenti sulla intera curva, sarà l' integrale definito del polinomio differenziale

$$(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z)\,dm + \lambda\delta ds + \mu\delta de + \xi\delta di$$

esteso tra i limiti indicati dai termini stessi della curva. Quindi, ponendo in questo polinomio in vece dei differenziali $ds$, $de$, $di$ le loro espressioni formate coi differenziali delle coordinate $x, y, z$, e facendo sparire i differenziali delle variazioni $\delta x$, $\delta y$, $\delta z$ da sotto il segno integrale, ed eguagliando a zero separatamente i coefficienti delle variazioni medesime rimaste sotto il segno integrale, si avranno, per le regole di Lagrange, le tre equazioni esprimenti le proprietà o relazioni che dovranno avere le forze colle coordinate della curva, affinchè non abbiano luogo movimenti relativi fra le parti della curva stessa: come annullando gli altri termini cioè quelli che non saranno più affetti dal segno integrale, si avranno le relazioni necessarie fra le forze, acciocchè non vi siano movimenti comuni a tutte le parti della curva medesima.

5.

Le espressioni dei differenziali $ds$, $de$, $di$ formate colle coordinate $x, y, z$ sono le seguenti

$$\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}\,,\quad \frac{1}{ds}\sqrt{d^2x^2+d^2y^2+d^2z^2-d^2s^2}\,,$$

$$ds\,\frac{dxd^2yd^3z+dzd^2xd^3y+dyd^2zd^3x-dxd^2zd^3y-dyd^2xd^3z-dzd^2yd^3x}{(dxd^2y-d^2xdy)^2+(dzd^2x-d^2zdx)^2+(dyd^2z-d^2ydz)^2}\,;$$

la prima di queste espressioni trovasi esposta e dimostrata in

quasi tutti i trattati di calcolo differenziale e integrale; e la seconda in molte opere, e dimostrata rigorosamente nel tomo sedicesimo di questa Società delle Scienze: la terza poi non è così comune, si può vedere però anch' essa dimostrata coi principj Leibniziani nella sopra citata memoria del Sig. Binet. Io approffitterò di questa occasione per pubblicare di essa la dimostrazione seguente, la quale è affatto simile a quella che diedi per la seconda nel tomo anzidetto di questa Società.

6.

Scriverò $y'$, $z'$, $y''$ ec. in vece di $\left(\frac{dy}{dx}\right)$, $\left(\frac{dz}{dx}\right)$, $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)$, ec. e nominerò $p'$, $q'$, $r'$ le coordinate rettangole del piano, che passa per l' origine delle coordinate parallelamente al piano osculatore della curva.

L' equazione di questo piano, che passa per l' origine delle coordinate, sarà

$p'+mq'+nr'=0$, posto $\frac{z''}{z'y''-z''y'}=m$, e $-\frac{y''}{z'y''-z''y'}=n$;

giacchè i parametri $m$, $n$ di questo piano debbono essere eguali agli analoghi del piano osculatore parallelo ad esso.

Così, denominando $p$, $q$, $r$ le coordinate rettangole della retta, che passa per l' origine delle coordinate, ed è perpendicolare al piano anzidetto, le sue equazioni saranno

$$p=\mathrm{M}r,\ q=\mathrm{N}r;$$

purchè i parametri M, N siano desunti dalle due equazioni

$$\mathrm{M}n=1,\ \mathrm{N}n=m.$$

Queste ultime due equazioni danno $\mathrm{M}=\frac{1}{n}$, ed $\mathrm{N}=\frac{m}{n}$; e però sarà

$$\mathrm{M}=\frac{y'z''-y''z'}{y''},\text{ ed }\mathrm{N}=-\frac{z''}{y''}.$$

Quindi le equazioni della retta anzidetta saranno le due seguenti

$$p=\frac{y'z''-y''z'}{y''}r,\ q=-\frac{z''}{y''}r.$$

Ora, gli angoli compresi fra i piani osculatori della curva, eguagliano evidentemente quelli compresi dai loro paralleli passanti per l'origine delle coordinate, e gli angoli compresi da questi eguagliano quelli formati dalle rette perpendicolari ad essi loro; adunque gli angoli compresi dai piani osculatori saranno anch' essi eguali a quelli compresi da queste medesime rette. Ma tutte le rette espresse dalle equazioni, che si ottengono, variando la $x$ nelle ultime due equazioni, sono nella superficie conica espressa dall' equazione, la quale si otterrebbe, eliminando la medesima $x$ dalle stesse due ultime equazioni; quindi l'angolo $i$ sarà eguale anche all' arco della sezione fatta a questa superficie conica dalla superficie sferica avente il centro nella origine delle coordinate e per raggio l'unità trigonometrica. Vale a dire, sarà $i$ eguale all'arco della curva espressa dalle tre equazioni.

$$p = \frac{y'z''-y''z'}{y''}\,r,\quad q = -\frac{z''}{y''}\,r,\quad p^2+q^2+r^2 = 1\ ;$$

ovvero dalle seguenti loro equivalenti

$$p = \frac{y'z''-y''z'}{\alpha}\ ,\quad q = -\frac{z''}{\alpha}\ ,\quad r = \frac{y''}{\alpha}\ ,$$

dove $\alpha$ è posta per semplicità in vece di

$$\sqrt{y''^2+z''^2+(y'z''-y''z')^2}\ ;$$

e $p$, $q$, ed $r$ rappresentano ora le tre coordinate rettangole della sezione medesima.

Essendo $\left(\frac{di}{dx}\right)^2 = \left(\frac{dp}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dq}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dr}{dx}\right)^2$,

ed i valori anzi-trovati delle coordinate $p$, $q$, $r$ dando

$$\left(\frac{dp}{dx}\right) = \frac{1}{\alpha}\,(y'z''-y''z') - \frac{1}{\alpha^2}\left(\frac{d\alpha}{dx}\right)(y'z''-y''z')\,,$$

$$\left(\frac{dq}{dx}\right) = \frac{z''}{\alpha^2}\left(\frac{d\alpha}{dx}\right) - \frac{z'''}{\alpha}\ ,$$

$$\left(\frac{dr}{dx}\right) = -\frac{y''}{\alpha^2}\left(\frac{d\alpha}{dx}\right) + \frac{y'''}{\alpha}\text{, si avrà}$$

$$\left(\frac{di}{dx}\right)^2 = \frac{1}{\alpha^4}\left[\,\alpha^2(y'''^2+z'''^2+(y'z'''-y'''z')^2)+\left(\frac{d\alpha}{dx}\right)^2(y''^2+z''^2+(y'z''-y''z')^2)\right.$$

$$-2\alpha\left(\frac{d\alpha}{dx}\right)(y''y'''+z''z'''+(y'z''-y''z')(y'z'''-y'''z')\Big]$$

ovvero $\alpha^4\left(\frac{di}{dx}\right)^2=(y''^2+z''^2+y'^2z''^2-2y'y''z'z''+z'^2y''^2)\times$

$$(y'''^2+z'''^2+y'^2z'''^2-2y'y'''z'z'''+z'^2y'''^2)$$

$$-(y''y'''+z''z'''+y'^2z''z'''+z'^2y''y'''-y'y'''z'z''-y'y''z'z''')^2,$$

per essere $\alpha^2=y''^2+z''^2+(y'z''-y''z')^2$, e però anche

$$\alpha\left(\frac{d\alpha}{dx}\right)=y''y'''+z''z'''+(y'z''-y''z')(y'z'''-y'''z').$$

Sviluppando il prodotto ed il quadrato ancora indicati nella espressione di $\alpha^4\left(\frac{di}{dx}\right)^2$, e facendo le riduzioni, si troverà

$$\alpha^4\left(\frac{di}{dx}\right)^2=(1+y'^2+z'^2)(y''^2z'''^2-2y''z''y'''z'''+z''^2z'''^2),$$

$$\text{ossia } \alpha^4\left(\frac{di}{dx}\right)^2=\left(\frac{ds}{dx}\right)^2(y''z'''-y'''z'')^2;$$

e conseguentemente si avrà

$$\left(\frac{di}{dx}\right)=\left(\frac{ds}{dx}\right)\frac{y''z'''-y'''z''}{y''^2+z''^2+(y'z''-y''z')^2}$$

vale a dire la derivata dell' angolo $i$ presa rispetto alla variabile $x$.

7.

Se la variabile principale, in vece di essere la $x$, sarà un' altra qualunque, per esempio $t$, dalla espressione trovata della $\left(\frac{di}{dx}\right)$ si desumerà quella della $\left(\frac{di}{dt}\right)$, moltiplicando per $\left(\frac{dx}{dt}\right)$ ciò che si otterrà, sostituendo nella medesima

$$\left(\frac{ds}{dx}\right)\frac{\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)\left(\frac{d^3z}{dx^3}\right)-\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)}{\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2+\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)^2+\left[\left(\frac{dy}{dx}\right)\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)-\left(\frac{dz}{dx}\right)\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)\right]^2}$$

anzi-trovata in luogo delle quantità

$$\left(\frac{ds}{dx}\right), \left(\frac{dy}{dx}\right), \left(\frac{dz}{dx}\right), \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right), \text{ ec.}$$

ordinatamente le seguenti

$$\frac{1}{x'}\left(\frac{ds}{dt}\right), \frac{y'}{x'}, \frac{z'}{x'}, \frac{x'y''-x''y'}{x'^2}, \text{ ec.}$$

nelle quali si è scritto $x'$, $y'$, $z'$, $x''$, $y''$, ec. in vece di

$$\left(\frac{dx}{dt}\right), \left(\frac{dy}{dt}\right), \left(\frac{dz}{dt}\right), \left(\frac{d^2x}{dt^2}\right), \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right), \text{ ec.}$$

Le sostituzioni quì indicate danno le quantità

$$\left(\frac{d^2y}{dx^3}\right)\left(\frac{d^3z}{dx^3}\right)-\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right),$$

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2+\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)^2+\left[\left(\frac{dy}{dx}\right)\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)-\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)\left(\frac{dz}{dx}\right)\right]^2$$

eguali rispettivamente alle seguenti

$$\frac{1}{x'^6}\left(x'y''z'''+z'x''y'''+y'z''x'''-x'z''y'''-y'x''z'''-z'y''x'''\right),$$

$$\frac{1}{x'^6}\left(\left(x'y''-x''y'\right)^2+\left(x'z''-x''z'\right)^2+\left(y'z''-y''z'\right)^2\right),$$

e per tanto sarà

$$\left(\frac{di}{di}\right)=\left(\frac{ds}{dt}\right)\frac{x'y''z'''+z'x''y'''+y'z''x'''-x'z''y'''-y'x''z'''-x'y''x'''}{\left(x'y''-x''y'\right)^2+\left(x'z''-x''z'\right)^2+\left(y'z''-y''z'\right)^2}$$

equazione che equivale, siccome è noto, a quest' altra

$$di=ds\,\frac{dxd^2yd^3z+dzd^2xd^3y+dyd^2zd^3x-dxd^2zd^3y-dyd^2xd^3z-dzd^2yd^3x}{\left(dxd^2y-d^2xdy\right)^2+\left(dxd^2z-d^2xdz\right)^2+\left(dyd^2z-d^2ydz\right)^2}$$

che è appunto quella, che si voleva dimostrare.

## 8.

Siccome le espressioni dei differenziali $ds$, $de$, $di$ sono visibilmente formate similmente dalle variabili $x$, $y$, $z$; così dai risultamenti, che si otterranno da essi differenziali operando per una di queste variabili, si potranno avere immediatamente e con grandissima facilità quelli, che si otterrebbero facendo delle operazioni analoghe per un' altra delle medesime tre variabili. Appoggiato a questa semplicissima osser-

vazione, nei calcoli seguenti, i quali si dovrebbero eseguire similmente per tutte tre le coordinate, avrò riguardo per ora alla variazione della sola $x$, indi dai risultamenti che troverò, dedurrò gli analoghi risultamenti per le altre due coordinate $y$, $z$.

9.

Essendo $\delta ds = \frac{dx}{ds}\delta dx = \frac{dx}{ds} d\delta x$, sarà $\int \lambda \delta ds = \int \lambda \frac{dx}{ds} d\delta x$;

e però $\int \lambda \delta ds = \lambda \frac{dx}{ds} \delta x - \int \delta x d \frac{\lambda dx}{ds}$.

Così, posto $\sqrt{d^2x^2 + d^2y^2 + d^2z^2 - d^2s^2} = r$, per essere

$$\delta de = \frac{d^2x}{rds}\delta d^2x - \frac{d^2s}{rds}\delta d^2s - \frac{de}{ds}\delta ds, \text{ si avrà}$$

$$\int \mu \delta de = \int \frac{\mu d^2x}{rds} d^2\delta x - \int \frac{\mu d^2s}{rds}\delta d^2s - \int \frac{\mu de}{ds} d\delta s,$$

ossia

$$\int \mu \delta de = \int \frac{\mu d^2x}{rds} d^2\delta x + \int \left( d\frac{\mu d^2s}{rds} - \mu \frac{de}{ds} \right) \frac{dx}{ds} d\delta x - \mu \frac{dx d^2s}{rds^2} \delta dx;$$

e però la parte di $\int \mu \delta de$, che rimarrà sotto il segno integrale, risulterà

$$\left( d^2 \frac{\mu d^2x}{rds} + d \frac{\mu dr de}{d^2s} - d\frac{dx}{ds} d \frac{\mu d^2s}{rds} \right) \delta x;$$

e l' altra, cioè quella portata fuori del medesimo segno sarà

$$\frac{\mu}{rds^2} \left( ds d^2x - d^2s dx \right) - \left( d \frac{\mu d^2x}{rds} - \frac{dx}{ds} d \frac{\mu d^2s}{rds} + \mu \frac{dx de}{ds^2} \right) \delta x.$$

10.

Ponendo $d^2y d^3z - d^2z d^3y = a, dz d^3y - dy d^3z = b, dy d^2z - dz d^2y = c$, ed osservando, che $(dx d^2y - d^2x dy)^2 + (dx d^2z - d^2x dz)^2 + (dy d^2z - d^2y dz)^2$ è eguale a $(d^2x^2 + d^2y^2 + d^2z^2 - d^2s^2) ds^2$ ossia a $de^2 . ds^4$, si avrà $di = \frac{a dx + b d^2x + c d^3x}{m}$; e però

$$\delta di = \frac{a\delta dx + b\delta d^2x + c\delta d^3x}{m} - \frac{2di}{de}\delta de - 3\frac{di}{ds}\delta ds;$$

e conseguentemente sarà

$$\int \xi\delta di = \int \frac{a\xi}{m}\, d\delta x + \int \frac{b\xi}{m}\, d^2\delta x + \int \frac{c\xi}{m}\, d^3\delta x - 2\int \frac{\xi di}{de}\,\delta e - 3\int \frac{\xi di}{ds}\,\delta ds :$$

la $m$ è posta in vece di $de^2 \,.\, ds^4$.

Ma i termini portati da $\int \mu\delta de$, e che sono rimasti sotto il segno integrale, sono

$$\left( d^2 \frac{\mu d^2 x}{r ds} + d\,\frac{\mu de dx}{ds^2} - d\,\frac{dx}{ds}\, d\,\frac{\mu d^2 s}{r ds} \right) \delta x ,$$

per cui i termini analoghi, che introdurrà $-2\int \frac{\xi di}{de}\,\delta de$, saranno

$$-2\left( d^2\,\frac{\xi di d^2 x}{r^2} + d\,\frac{\xi di dx}{ds^2} - d\,\frac{dx}{ds}\, d\,\frac{\xi di d^2 s}{r^2} \right) \delta x ;$$

ed i termini simili, cioè rimasti sotto il segno integrale e provenienti dagli altri termini dell'integrale in quistione $\int \xi\delta di$, sono evidentemente

$$-\left( d\,\frac{a\xi}{m} - d^2\,\frac{b\xi}{m} + d^3\,\frac{\xi c}{m} - 3d\,\frac{\xi di dx}{ds^2} \right) \delta x .$$

Adunque i termini, che provveranno da $\xi\delta di$, e che rimarranno sotto il segno integrale, saranno i seguenti

$$-\left( d\,\frac{a\xi}{m} - d^2\frac{b\xi}{m} + d^3\,\frac{c\xi}{m} - 2d\,\frac{dx}{ds}\, d\,\frac{\xi di d^2 s}{r^2} - d\,\frac{\xi di dx}{ds^2} + 2d^2\,\frac{\xi di d^2 x}{r^2} \right) \delta x :$$

e quelli fuori del medesimo segno, evidentemente gli altri

$$\left( \frac{a\xi}{m} - d\,\frac{b\xi}{m} + d^2\,\frac{c\xi}{m} + 2d\,\frac{\xi di d^2 x}{r^2} - 2\,\frac{dx}{ds}\, d\,\frac{\xi di d^2 s}{r^2} - \frac{\xi di dx}{ds^2} \right) \delta x$$

$$+ \left( \frac{b\xi}{m} - d\,\frac{c\xi}{m} - 2\,\frac{\xi di d^2 x}{r^2} + 2\,\frac{\xi di dx d^2 s}{r^2 ds} \right) \delta dx + \frac{c\xi}{m}\,\delta d^2 x .$$

II.

Eguagliando a zero la somma di tutte le quantità, che moltiplicano la variazione $\delta x$ rimasta sotto il segno integrale del polinomio

$$( X\delta x + Y\delta y + Z\delta z )\, dm + \lambda\delta ds + \mu\delta de + \xi\delta di ,$$

si ottiene un'equazione, alla quale si può dare la forma seguente,

$$X dm - d\left( \lambda\,\frac{dx}{ds} + A\mu + B d\mu + C\xi + D d\xi + E d^2\xi \right) = 0 ,$$

ponendo

$$\frac{dx}{ds}\, d\,\frac{d^2 s}{r ds} - \frac{dx}{ds} \,.\, \frac{de}{ds} - d\,\frac{d^2 x}{r ds} = A , \quad \frac{1}{r ds}\left( \frac{dx}{ds}\, d^2 s - d^2 x \right) = B ,$$

$$\frac{a}{m} - d\,\frac{b}{m} + d^2\,\frac{c}{m} - \frac{dx}{ds}\,\frac{di}{ds} - 2\,\frac{dx}{ds}\,d\,\frac{di d^2 s}{r^2} + 2d\,\frac{di d^2 x}{r^2} = C\,,$$

$$-\frac{b}{m} + 2d\,\frac{c}{m} + \frac{2}{r^2}\left(d^2 x - \frac{dx}{ds}\,d^2 s\right) di = D\,,\ \text{e finalmente}\ \frac{c}{m} = E.$$

12.

Si ponga $d^2 z d^3 x - d^2 x d^3 z = a'$, $dx d^3 z - dz d^3 x = b'$, $dz d^2 x - dx d^2 z = c'$, $d^2 x d^3 y - d^2 y d^3 x = a''$, $dy d^3 x - dx d^3 y = b''$, $dx d^2 y - dy d^2 x = c''$; e si indichino colle A', B', C', D', E', le espressioni, che si ottengono, cambiando in quelle indicate dalle A, B, C, D, E ordinatamente le $y$, $z$, $x$ nelle $z$, $x$, $y$, e però le $a$, $b$, $c$ nelle $a'$, $b'$, $c'$; e colle A'', B'', C'', D'', E'', le analoghe espressioni che si hanno cambiando in queste ultime le $z$, $x$, $y$ ordinatamente nelle $x$, $y$, $z$, epperò le $a'$, $b'$, $c'$ nelle $a''$, $b''$, $c''$.

Egli è facile a comprendersi, per quello che si è detto nel paragrafo ottavo, che le due equazioni, che si otterrebbero facendo per le variazioni delle ordinate $y$, $z$, ciò che si è fatto estesamente per quella della $x$, sarebbero le seguenti

$$Y dm - d\left(\lambda\,\frac{dy}{ds} + A'\mu + B' d\mu + C'\xi + D' d\xi + E' d^2\xi\right) = 0,$$

$$Z dm - d\left(\lambda\,\frac{dz}{ds} + A''\mu + B'' d\mu + C''\xi + D'' d\xi + E'' d^2\xi\right) = 0.$$

Le tre equazioni indefinite

$$X dm - d\left(\lambda\,\frac{dx}{ds} + A\mu + B d\mu + C\xi + D d\xi + E d^2\xi\right) = 0,$$

$$Y dm - d\left(\lambda\,\frac{dy}{ds} + A'\mu + B' d\mu + C'\xi + D' d\xi + E' d^2\xi\right) = 0,$$

$$Z dm - d\left(\lambda\,\frac{dz}{ds} + A''\mu + B'' d\mu + C''\xi + D'' d\xi + E'' d^2\xi\right) = 0,$$

le quali rappresentano in tutta la generalità la linea elastica od una proprietà che ha luogo nello stato di equilibrio qualunque sia la natura della linea medesima, sono quelle dalle quali desumerò i valori richiesti delle tre forze interiori $\lambda$, $\mu$, $\xi$.

13.

Prima di incominciare le operazioni colle quali determinerò le quantità $\lambda$, $\mu$, $\xi$, esporrò quì alcune proprietà delle funzioni $a$, $b$, $c$, $a'$, $b'$, ec. ed altre delle A, B, C, D, E, A', B', ec. di cui mi valgo in essa determinazione.

Ponendo nelle equazioni, che quì seguono, in vece delle funzioni $a$, $b$, $c$, $a'$, $b'$, ec. ciò che esse rappresentano, facilmente si verifica, che hanno luogo le proprietà scritte algebraicamente colle equazioni medesime, cioè che

$$cdx + c'dy + c''dz = 0\,;\quad bdx + b'dy + c''dz = 0\,;$$

$$a'dy + a''dz - bd^2x - cd^3x = 0\,;$$

$$dc = -b\,,\quad dc' = -b'\,,\quad dc'' = -b''\,;$$

$$(cd^2y - c'd^2x)dz + (c''d^2x - cd^2z)dy + (c'd^2z - c''d^2y)dx = -m^2ds^2\,;$$

$$db\,.dx + db'\,.dy + db''\,.dz = -adx - a'dy - a''dz.$$

Essendo, come si vede quì sopra, $dc = -b$, e però

$$\frac{a}{m} - d\frac{b}{m} + d^2\frac{c}{m} = \frac{a-2b}{m} - 3bd\frac{1}{m} + cd^2\frac{1}{m}\,,\ \text{e}$$

$$-\frac{b}{m} + 2d\frac{c}{m} = -\frac{3b}{m} + 2cd\frac{1}{m}\,,\ \text{sarà}$$

$$\mathrm{C} = \frac{a-2b}{m} - 3bd\frac{1}{m} + cd^2\frac{1}{m} + \left(2d\frac{d^2x}{r^2} - 2\frac{dx}{ds}d\frac{d^2s}{r^2} - \frac{dx}{ds}\cdot\frac{1}{ds}\right)di$$

$$+\frac{2}{r^2}\left(d^2x - \frac{dx}{ds}d^2s\right)d^2i\,,\ \text{e}\ \mathrm{D} = -\frac{3b}{m} + 2cd\frac{1}{m} + \frac{2}{r^2}\left(d^2x - \frac{dx}{ds}d^2s\right)di\,.$$

14.

Sostituendo nei due trinomj $\mathrm{A}dx + \mathrm{A}'dy + \mathrm{A}''dz$, $\mathrm{B}dx + \mathrm{B}'dy + \mathrm{B}''dz$, in luogo delle funzioni A, A', A'', B, B', B' i loro valori, ed osservando, che si ha

$$dxd^2x + dyd^2y + dzd^2z = dsd^2s\,,\ \text{e}$$

$$\frac{dx}{ds}d\frac{d^2x}{rds} + \frac{dy}{ds}d\frac{d^2y}{rds} + \frac{dz}{ds}d\frac{d^2z}{rds} - d\frac{d^2s}{rds} = -\frac{de}{ds}\,,$$

facilmente si verifica essere tanto $Adx + A'dy + A''dz = 0$ ,
quanto $Bdx + B'dy + B''dz = 0$ .

Così per essere

$$\frac{dx}{ds} d\frac{d^2x}{r^2} + \frac{dy}{ds} d\frac{d^2y}{r^2} + \frac{dz}{ds} d\frac{d^2z}{r^2} - d\frac{d^2s}{r^2} = -\frac{1}{ds},$$

e stante l' ultima relazione delle $a$ , $a'$, $a'$, $b$ , $b'$ , $b''$ trovata nell' antecedente paragrafo , essendo

$$-\frac{2}{m}\left( db.dx+db'.dy+db''.dz \right) + \frac{1}{m}\left( adx+a'dy+a''dz \right) =$$
$$\frac{3}{m}\left( adx + a'dy + a''dz \right),$$

il trinomio $Cdx + C'dy + C''dz$ sarà eguale a

$-3di+\frac{3}{m}\left(adx+a'dy+a''dz\right)$ ossia a $\frac{3}{m}\left( adx+a'dy+a''dz-mdi \right)$;

cioè sarà anche $Cdx + C'dy + C''dz = 0$ ,

essendo $mdi = adx + bd^2x + cd^3x$ , epperò

$$adx + a'dx + a''dz - mdi = a'dy + a''dz - bd^2x - cd^3x ,$$

quantità che si annulla per la terza equazione esposta nel paragrafo antecedente.

Similmente , $Ddx + D'dy + D''dz$ eguagliando

$$-\frac{3}{m}\left( bdx + b'dy + b''dz \right) + 2\left( cdx + c'dy + c''dz \right)$$
$$+ \frac{2di}{r^2}\left( dxd^2x + dyd^2y + dzd^2z - dsd^2s \right),$$

sarà pure , per le due prime equazioni del medesimo paragrafo precedente ,

$$Ddx + D'dy + D''dz = 0 .$$

In ultimo facilissimamente si verifica ancora , che è

$$Edx + E'dy + E''dz = 0$$

per la stessa prima equazione anzi-citata.

Ciò premesso , passo a determinare le quantità $\lambda$ , $\mu$ , $\xi$, ed incomincio dalla prima , cioè dalla $\lambda$ .

15

Integrando le tre equazioni indefinite

$$Xdm - d\left(\lambda\frac{dx}{ds} + A\mu + Bd\mu + C\xi + Dd\xi + Ed^2\xi\right) = 0,$$

$$Ydm - d\left(\lambda\frac{dy}{ds} + A'\mu + B'd\mu + C'\xi + D'd\xi + E'd^2\xi\right) = 0,$$

$$Zdm - d\left(\lambda\frac{dz}{ds} + A''\mu + B''d\mu + C''\xi + D''d\xi + E''d^2\xi\right) = 0$$

trovate nel paragrafo dodicesimo, si hanno le seguenti

$$\int Xdm - \lambda\frac{dx}{ds} - A\mu - Bd\mu - C\xi - Dd\xi - Ed^2\xi = 0,$$

$$\int Ydm - \lambda\frac{dy}{ds} - A'\mu - B'd\mu - C'\xi - D'd\xi - E'd^2\xi = 0,$$

$$\int Zdm + \lambda\frac{dz}{ds} - A''\mu - B''d\mu - C''\xi - D''d\xi - E'd^2\xi = 0:$$

le tre costanti introdotte dalle tre integrazioni si suppongono contenute rispettivamente negli integrali $\int Xdm$, $\int Ydm$, $\int Zdm$ solamente indicati.

16.

Ora queste ultime tre equazioni si moltiplichino rispettivamente per $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$, e si faccia la somma delle tre risultanti, e si otterà una equazione, che si ridurrà alla seguente semplicissima

$$\frac{dx}{ds}\int Xdm + \frac{dy}{ds}\int Ydm + \frac{dz}{ds}\int Zdm - \lambda = 0,$$

per essere $Adx + A'dy + A''dz = 0$, $Bdx + B'dy + B''dz = 0$,
$Cdx + C'dy + C''dz = 0$, $Ddx + D'dy + D''dz = 0$,
$Edx + E'dy + E''dz = 0$
siccome abbiamo veduto nel paragrafo penultimo.

L' equazione quì trovata dà immediatamente

$$\lambda = \frac{dx}{ds}\int X dm + \frac{dy}{ds}\int Y dm + \frac{dz}{2s}\int Z\, dm,$$

cioè la tensione espressa colle forze esteriori e le coordinate della curva in equilibrio.

17.

Eliminando la funzione $\lambda$ dalle prime due delle ultime equazioni del paragrafo quindicesimo, si ottiene quest' altra equazione

$$dx\int Y dm - dy\int X dm + (A dy - A' dx)\mu + (B dy - B' dx)\, d\mu + (C dy - C' dx)\xi + (D dy - D' dx) d\xi + (E dy - E' dx) d^2\xi = 0,$$

la quale integrata dà

$$x\int Y dm - y\int X dm + \int (yX - Yx)\, dm + \frac{c''\mu}{r ds} + \frac{dz}{ds}\,\xi + \frac{c dy - c' dx}{m}\, d\xi = 0,$$

per essere le tre quantità

$$x\int Y dm - y\int X dm + \int (yX - Yx) dm,$$

$$\frac{c''\mu}{r ds},\ \frac{dz}{ds}\,\xi + \frac{c dy - c' dx}{m}\, d\xi$$

rispettivamente gli integrali delle tre seguenti

$$dx\int Y dm - dy\int X dm,\ (A dy - A' dx)\mu + (B dy - B' dx)\, d\mu,$$

$$(C dy - C' dx)\xi + (D dy - D' dx)\, d\xi + (E dy - E' dx)\, d^2\xi,$$

come facilissimamente si verifica col soccorso delle relazioni $dc = -b$, $dc' = -b'$ esposte al paragrafo tredicesimo.

Facendo, per la prima e terza, e per la seconda e terza delle medesime tre equazioni del penultimo paragrafo due operazioni affatto simili a quelle fatte dianzi per le prime due di esse, cioè eliminando la $\lambda$, ed integrando le risultanti, si ottengono queste altre due equazioni

$$z\int X dm - x\int Z dm + \int (xZ - Xz) dm + \frac{c'\mu}{r ds} + \frac{dy}{ds}\,\xi + \frac{c'' dx - c dz}{m}\, d\xi = 0,$$

$$y\int Z dm - z\int Y dm + \int (zY - Zy) dm + \frac{c\mu}{r ds} + \frac{dx}{ds}\,\xi + \frac{c' dz - c'' dy}{m}\, d\xi = 0:$$

le costanti portate dalle tre integrazioni quì eseguite, si suppongono contenute nelle tre nuove espressioni

$$\int(y\mathrm{X}-\mathrm{Y}x)dm,\ \int(x\mathrm{Z}-\mathrm{X}z)dm,\ \int(z\mathrm{Y}-\mathrm{Z}y)dm,$$

cioè una nella prima, un'altra nella seconda, e la terza nell' ultima .

In fine si faccia

$$z\int\mathrm{Y}dm-y\int\mathrm{Z}dm-\int(z\mathrm{Y}-\mathrm{Z}y)dm=\mathrm{L},$$
$$x\int\mathrm{Z}dm-z\int\mathrm{X}dm-\int(x\mathrm{Z}-\mathrm{X}z)dm=\mathrm{M},$$
$$y\int\mathrm{X}dm-x\int\mathrm{Y}dm-\int(y\mathrm{X}-\mathrm{Y}x)dm=\mathrm{N},$$

ed i tre integrali trovati diverranno

$$\mathrm{L}-\frac{c}{rds}\mu-\frac{dx}{ds}\xi-\frac{c'dz-c''dy}{m}d\xi=0,$$
$$\mathrm{M}-\frac{c'}{rds}\mu-\frac{dy}{ds}\xi-\frac{c''dx-cdz}{m}d\xi=0,$$
$$\mathrm{N}-\frac{c''}{rds}\mu-\frac{dz}{ds}\xi-\frac{cdy-c'dx}{m}d\xi=0.$$

18.

Ora si ponga , pure per semplicità $\sqrt{[(dxd^2y-d^2xdy)^2+(dxd^2z-d^2xdz)^2+(dyd^2z-d^2ydz)^2]}$ ossia $rds=\varpi$, e si moltiplichino ordinatamente per $\frac{c}{\varpi}$ , $\frac{c'}{\varpi}$ , $\frac{c''}{\varpi}$ le ultime tre equazioni trovate quì sopra , e somminsi le tre risultanti, e si otterrà una equazione , nella quale i coefficenti delle quantità $\mu$, $\xi$, $d\xi$ visibilmente saranno

$$-\frac{1}{\varpi^2}(c^2+c'^2+c''^2),\ -\frac{1}{\varpi ds}(cdx+c'dy+c''dz),$$

$$-\frac{c}{m\varpi}(c'dz-c''dy)-\frac{c''}{m\varpi}(c'dx-cdy)-\frac{c'}{m\varpi}(c''dx-cdz),$$

il primo dei quali è evidentemente eguale ad uno, il secondo a zero per l' equazione prima esposta al paragrafo tredicesimo , ed il terzo identicamente nullo . Quindi la equazione risultante dalla detta addizione si ridurrà alla seguente

$$\frac{c}{\sigma}\mathrm{L} + \frac{c'}{\sigma}\mathrm{M} + \frac{c''}{\sigma}\mathrm{N} - \mu = 0,$$

dalla quale si ha immediatamente

$$\mu = \frac{c}{\sigma}\mathrm{L} + \frac{c'}{\sigma}\mathrm{M} + \frac{c''}{\sigma}\mathrm{N},$$

cioè il valore della $\mu$ elasticità.

19.

Finalmente, per determinare il valore della $\xi$, si moltiplichino le stesse tre ultime equazioni del paragrafo penultimo rispettivamente per $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$, e si sommino quì pure le tre risultanti, ed avrassi

$$\frac{dx}{ds}\mathrm{L} + \frac{dy}{ds}\mathrm{M} + \frac{dz}{ds}\mathrm{N} - \xi = 0,$$

per essere, stante l'equazione prima del tredicesimo paragrafo già più volte citato,

$$c\,dx + c'\,dy + c''\,dz = 0,$$

ed evidentemente $dx^2 + dy^2 + dz^2 = ds^2$, e nulla la quantità

$$-(c'dz - c''dy)dx - (c''dx - cdz)dy - (cdy - c'dx)dz.$$

Quindi $\xi = \frac{dx}{ds}\mathrm{L} + \frac{dy}{ds}\mathrm{M} + \frac{dz}{ds}\mathrm{N}$, cioè il valore della $\xi$ torsione in quistione.

Se in questo valore della $\xi$ si pone in luogo delle L, M, N ciò che esse rappresentano, si ha un' espressione per la stessa $\xi$, alla quale si può dare con facilità la forma seguente

$$\frac{zdx - xdz}{ds}\int \mathrm{Y}dm + \frac{xdy - ydx}{ds}\int \mathrm{Z}dm + \frac{ydz - zdy}{ds}\int \mathrm{X}dm +$$

$$\frac{dx}{ds}\int (y\mathrm{Z} - \mathrm{Y}z)dm + \frac{dy}{ds}\int (z\mathrm{X} - \mathrm{Z}x)dm + \frac{dz}{ds}\int (x\mathrm{Y} - \mathrm{X}y)dm$$

che è quello del Signor Binet, di cui si è parlato nel paragrafo secondo.

Differenziando il valore della $\xi$, ed osservando, che

$$\frac{dx}{ds}d\mathrm{L} + \frac{dy}{ds}d\mathrm{M} + \frac{dz}{ds}d\mathrm{N} = 0,$$

si ha $d\xi = \mathrm{L}\,d\,\frac{dx}{ds} + \mathrm{M}d\,\frac{dy}{ds} + \mathrm{N}d\,\frac{dz}{ds}$, il che è singolare.

20.

Essendo $\int X dm$, $\int Y dm$, $\int Z dm$ le grandezze di tre forze parallele rispettivamente agli assi delle coordinate $x$, $y$, $z$ ed equivalenti a tutte le forze esteriori, che agiscono sulla massa $m$, e $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$ essendo i coseni degli angoli fatti dalla tangente cogli assi delle medesime coordinate, sarà

$$\frac{dx}{ds}\int X dm + \frac{dy}{ds}\int Y dm + \frac{dz}{ds}\int Z dm$$

l' espressione della somma di quelle componenti di tutte le forze esteriori applicate alla massa $m$, che sono parallele alla tangente medesima.

21.

Così, essendo evidentemente L, M, N le somme dei momenti di tutte le forze esteriori applicate alla massa $m$, rispetto delle rette parallele ai tre assi delle coordinate, e che passano pel punto a cui corrispondono le $x$, $y$, $z$; e pel paragrafo sesto, essendo $\frac{c}{\omega}$, $\frac{c'}{\omega'}$, $\frac{c''}{\omega''}$ i coseni degli angoli che fanno queste medesime parallele colla retta, che passa pel punto corrispondente alle coordinate stesse $x$, $y$, $z$ ed è perpendicolare al piano osculatore, riuscirà

$$\frac{c}{\omega}\mathrm{L} + \frac{c'}{\omega}\mathrm{M} + \frac{c''}{\omega}\mathrm{N}$$

la somma dei momenti delle forze esteriori, che agiscono sulla massa $m$, rispetto della retta anzidetta, cioè della retta, che passa pel punto corrispondente alle coordinate $x$, $y$, $z$ ed è perpendicolare al piano osculatore.

22.

Similmente, per essere $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$, come si è già detto, i coseni degli angoli fatti dalla tangente con quelle rette rispetto cui le somme dei momenti sono L, M, N, sarà

$$\frac{dx}{ds}\mathrm{L} + \frac{dy}{ds}\mathrm{M} + \frac{dz}{ds}\mathrm{N}$$

la somma dei momenti delle forze suddette rispetto della tangente.

23.

In ultimo, siccome $-\frac{ds}{r}d\frac{dx}{ds}$, $-\frac{ds}{r}d\frac{dy}{ds}$, $-\frac{ds}{r}d\frac{dz}{ds}$, sono i coseni degli angoli compresi fra il raggio di curvatura della linea in equilibrio e le rette rispetto delle quali i momenti delle forze esteriori sono L, M, N, così la somma dei momenti delle medesime forze rispetto della normale di cui è parte il raggio di curvatura stesso sarà evidentemente

$$-\frac{ds}{r}\left(\mathrm{L}\,d\frac{dx}{ds} + \mathrm{M}d\frac{dy}{ds} + \mathrm{N}d\frac{dz}{ds}\right).$$

24.

Quindi, stante i valori delle $\lambda$, $\mu$, $\xi$ trovati ai paragrafi sedicesimo, diciassettesimo, e diciannovesimo, concludiamo, che nello stato di equilibrio, la forza $\lambda$ eguaglia la somma di quelle componenti di tutte le forze esteriori agenti sulla massa $m$, che sono parallele alla tangente; $\mu$ la somma dei momenti delle stesse forze esteriori rispetto alla retta, che passa pel punto a cui corrispondono le coordinate $x$, $y$, $z$ ed è perpendicolare al piano osculatore; in fine che la $\xi$ eguaglia la somma dei momenti delle medesime forze relativamente alla tangente. Come, pel valore di $d\xi$ esposto alla fine del medesimo paragrafo diciannovesimo, sarà $-\frac{ds}{r}d\xi$ la

somma dei momenti rispetto della normale in cui cade quel raggio di curvatura della curva in equilibrio, il quale passa pel punto corrispondente alle coordinate $x$, $y$, $z$.

25.

Fra le infinite rette che possano passare pel punto a cui corrispondono le coordinate $x, y, z$, quella intorno della quale le forze esteriori applicate alla massa $m$, produrranno il massimo momento, farà cogli assi delle coordinate degli angoli i cui coseni saranno rispettivamente

$$\frac{L}{\sqrt{(L^2+M^2+N^2)}}, \frac{M}{\sqrt{(L^2+M^2+N^2)}}, \frac{N}{\sqrt{(L^2+M^2+N^2)}}$$

e colle rette intorno delle quali i momenti sono eguali a $\mu$, $\xi$, $-\frac{ds}{r}d\xi$, farà degli angoli i coseni dei quali saranno

$$\frac{\mu}{\sqrt{(\mu^2+\xi^2+\frac{ds^2}{r^2}d\xi^2)}}, \frac{\xi}{\sqrt{(\mu^2+\xi^2+\frac{ds^2}{r^2}d\xi^2)}}, \frac{-\frac{ds}{r}d\xi}{\sqrt{(\mu^2+\xi^2+\frac{ds^2}{r^2}d\xi^2)}}$$

ed il massimo momento stesso sarà eguale a

$$\sqrt{(L^2+M^2+N^2)} \text{ ossia a } \sqrt{\left(\mu^2+\xi^2+\frac{ds^2}{r^2}d\xi^2\right)},$$

siccome facilmente si comprende colla teorica della composizione dei momenti. Quindi la massima resistenza necessaria che dovranno opporre le parti della curva nel punto corrispondente alle coordinate $x$, $y$, $z$, affinchè essa non si spezzi in esso punto, dovrà esser quella, la quale si oppone alla rotazione, che potrebbe aver luogo intorno alla retta quì determinata.

26.

Le tre equazioni, che formano lo scopo principale dei paragrafi anzi-citati e che eqnivalgono alle prime tre del paragrafo quindicesimo, si possono trovare anche, senza ricorrere al principio fecondissimo delle velocità virtuali di Gio-

vanni Bernulli ovvero allo equivalente degli indeterminati di Poinsot e riprodotto dal Magistrini, usando cioè immediatamente il principio della composizione delle forze.

Consideriamo la curva nel suo stato di equilibrio, e come composta di due porzioni, cioè della porzione $m$ e dell' altra; e supponiamo queste parti ambedue rigide, più la seconda immobile, ossia fissa nello spazio.

La natura del sistema costituito dai punti della curva è tale, che i movimenti possibili, onde alterare le distanze della sua parte dall' altra parte, sono, o di moversi parallelamente alla retta tangente, o di rotare intorno di questa medesima retta, ovvero intorno alla retta che passa pel punto a cui corrispondono le stesse coordinate $x, y, z$ ed è perpendicolare al piano osculatore; quindi impediti questi tre movimenti la prima parte di essa curva non si potrà nè avvicinare nè allontanare dalla seconda, cioè saranno impediti i movimenti relativi fra le parti della curva stessa. Ma la parte $m$ della curva è spinta parallelamente alla tangente da una forza eguale a

$$\frac{dx}{ds}\int X dm + \frac{dy}{ds}\int Y dm + \frac{dz}{ds}\int Z\, dm\ ,$$

a rotare intorno a questa medesima retta con un momento eguale a

$$\frac{c}{o}\,L + \frac{c'}{o}\,M + \frac{c''}{o}\,N,$$

ed intorno la detta retta perpendicolare al piano osculatore col momento

$$\frac{dx}{ds}\,L + \frac{dy}{ds}\,M + \frac{dz}{ds}\,N;$$

adunque, se $\lambda$ esprimerà la tensione della curva nello stato di equilibrio, $\mu$ la forza che si opporrà alla rotazione intorno la detta retta perpendicolare al piano osculatore cioè la elasticità, e $\xi$ quella forza, che impedisce la rotazione intorno la tangente cioè la torsione, sarà

$$\lambda = \frac{dx}{ds}\int X dm + \frac{dy}{ds}\int Y dm + \frac{dz}{ds}\int Z\, dm\ ,$$

$$\mu = \frac{c}{\omega} \mathrm{L} + \frac{c'}{\omega} \mathrm{M} + \frac{c''}{\omega} \mathrm{N},$$

$$\xi = \frac{dx}{ds} \mathrm{L} + \frac{dy}{ds} \mathrm{M} + \frac{dz}{ds} \mathrm{N}$$

le quali relazioni sono visibilmente quelle trovate sopra col principio delle velocità virtuali.

27.

Ora passo a considerare i termini, che sono fuori del segno integrale, cioè quelli che si riferiscono ai termini della curva in equilibrio, e dai quali si deducono le relazioni, che debbono avere le forze, affinchè non abbiano luogo movimenti comuni. Quelli provenienti dalla variazione della $x$ sono, come abbiamo veduto ai paragrafi nono e decimo,

$$\left( \lambda \frac{dx}{ds} + \mathrm{A}\mu + \mathrm{B}d\mu + \mathrm{C}\xi + \mathrm{D}d\xi + \mathrm{E}d^2\xi \right) \delta x$$
$$- (\mathrm{B}\mu + \mathrm{F}\xi + \mathrm{E}d\xi)\, \delta dx + \mathrm{E}\xi \delta d^2 x, \text{ ove}$$
$$\mathrm{F} = \mathrm{D} - d\frac{1}{m};$$

e però pel paragrafo undecimo i termini analoghi provenienti dalle variazioni delle $y$, $z$ saranno

$$\left( \lambda \frac{dy}{ds} + \mathrm{A}'\mu + \mathrm{B}'d\mu + \mathrm{C}'\xi + \mathrm{D}'d\xi + \mathrm{E}'d^2\xi \right) \delta y$$
$$- (\mathrm{B}'\mu + \mathrm{F}'\xi + \mathrm{E}'d\xi)\, \delta dy + \mathrm{E}'\xi \delta d^2 y,$$
$$\left( \lambda \frac{dz}{ds} + \mathrm{A}''\mu + \mathrm{B}''d\mu + \mathrm{C}''\xi + \mathrm{D}''d\xi + \mathrm{E}''d^2\xi \right) \delta z$$
$$- (\mathrm{B}''\mu + \mathrm{F}''\xi + \mathrm{E}''d\xi)\, \delta dz + \mathrm{E}''\xi \delta d^2 z:$$

F', F'' hanno colla F relazioni simili a quelle, che hanno B', B'' colla B.

28.

Se la curva sarà interamente libera, rimarranno indeterminate tutte le variazioni $\delta x$, $\delta y$, $\delta z$, $\delta dx$, $\delta dy$, $\delta dz$, $\delta d^2 x$,

$\delta d^2y$, $\delta d^2z$ tanto al principio quanto al fine dell' integrale; e però, affinchè spariscano i termini anzi-esposti, dovranno essere nulle tutte le quantità $\lambda$, $\mu$, $d\mu$, $\xi$, $d\xi$, $d^2\xi$ sì al principio che al fine del medesimo integrale. Se la prima estremità sarà fissa, a questa medesima estremità saranno nulle le variazioni $\delta x$, $\delta y$, $\delta z$, epperò spariranno i termini moltiplicati per esse; quindi l'annullamento dei termini relativi a questa estremità richiederà solamente quello delle $\mu$, $d\xi$, $\xi$. Così, se alla prima estremità della curva fosse individuato anco il luogo geometrico della tangente corrispondente, dalle anzidette espressioni sparirebbero anche $\delta dx$, $\delta dy$, $\delta dz$; e però a questa estremità si annullarebbe solamente la $\xi$; in ultimo, se la curva avrà fisse ambedue le estremità, saranno nulle sì all' una che all'altra le tre quantità $\mu$, $\xi$, $d\xi$ per la indeterminazione delle variazioni $\delta dx$, $\delta dy$, $\delta dz$, $\delta d^2x$, $\delta d^2y$, $\delta d^2z$ ad ambedue le medesime estremità.

Così, se alle estremità della curva vi fossero applicate delle forze particolari, o le estremità medesime dovessero moversi in superficie o linee date, sommando i momenti virtuali di queste forze esteriori o di questi ostacoli coi termini rimasti fuori del segno integrale, e sopra esposti, e trattando l' equazione risultante, come se rappresentasse un equilibrio particolare a questi punti, si avrebbero anco in questi casi, le proprietà delle quantità $\lambda$, $\mu$, $\xi$, ai termini stessi.

29.

Colle proprietà quì accennate delle quantità $\lambda$, $\mu$, $\xi$, $d\mu$, $d\xi$, $d^2\xi$, e col soccorso delle ultime equazioni esposte ai paragrafi quindicesimo e diciassettesimo si trovano facilmente le note relazioni, che debbono avere le forze esteriori, affinchè non abbiano luogo movimenti comuni. Io non espongo queste equazioni, giacchè sarei obbligato anche in questa occasione a ripetere ciò che dice Lagrange nella sua Meccanica Analitica, parlando dell' equilibrio delle curve dette da

lui elastiche, ma fo però osservare, che per istabilire con questo metodo le dette equazioni, si ha bisogno di annullare delle quantità, le quali sono in generale finite, od infinitesime se sono differenziali, per tutti gli altri punti della curva, e non già infinite, come succede in quello di Lagrange.

30.

Quando la curva sarà rigida, colle equazioni dalle quali verrà data la sua figura, cioè colle equazioni da cui verrà essa rappresentata in una data posizione, insieme alle altre sue proprietà o date o determinate, che sono necessarie per impedire i movimenti comuni, si avranno le equazioni rappresentanti la medesima nella posizione di equilibrio; e cavando da queste ultime equazioni i valori di due fra le coordinate $x$, $y$, $z$ e sostituendoli nelle espressioni trovate delle $\lambda$, $\mu$, $\xi$, si otterranno immediatamente queste tre forze, le quali equivarranno allo sforzo, che faranno le forze esteriori per cambiare la figura alla curva stessa vale, a dire otterransi la tensione, la elasticità, e la torsione di essa.

31.

Qualunque sia la natura della curva, se le tre forze $\lambda$, $\mu$, $\xi$ saranno date in funzioni delle sole coordinate $x, y, z$ o saranno date due equazioni fra queste forze e le stesse coordinate; nel primo caso, ponendo i dati valori delle $\lambda$, $\mu$, $\xi$ nelle prime tre equazioni del paragrafo quindicesimo, avransi tre nuove equazioni fra le coordinate $x$, $y$, $z$, due qualunque delle quali saranno quelle, che rappresenteranno la curva nella posizione dell'equilibrio; e nell'altro caso, eliminando le quantità $\lambda$, $\mu$, $\xi$ dalle due equazioni date e dalle tre anzidette del paragrafo quindicesimo, si otterranno due equazioni fra le sole coordinate $x, y, z$, le quali rappresenteranno la curva stessa nella posizione dell'equilibrio.

32.

Pelle curve elastiche saranno $\lambda$, $\mu$, $\xi$ funzioni delle coordinate $x, y, z$ e dell' allungamento od accorciamento che avrà subìto la curva nello stato di equilibrio. Sostituendo queste funzioni nelle prime equazioni del paragrafo quindicesimo in vece delle stesse $\lambda$, $\mu$, $\xi$, si avranno bensì tre equazioni fra le coordinate $x, y, z$ della curva in equilibrio, ma in esse vi sarà l' allungamento o l' accorciamento incognito subìto dalla curva sotto l' azione delle forze nello stato di equilibrio; ed eliminando quest' ultima quantità, cioè l' allungamento o l' accorciamento anzidetto, si otterranno due equazioni, le quali rappresenteranno la curva nello stato di equilibrio.

Con queste equazioni e colle espressioni delle quantità $\lambda$, $\mu$, $\xi$ trovate ai paragrafi sedicesimo, diciassettesimo, potransi avere tre funzioni di una sola di queste coordinate, le quali rappresentino le stesse tre forze $\lambda$, $\mu$, $\xi$, cioè la tensione la elasticità, e la torsione della curva completamente elastica, in equilibrio.

33.

In fine, se fossero conosciute la figura della curva nello stato di equilibrio, e le funzioni delle sole coordinate rappresentanti le forze $\lambda$, $\mu$, $\xi$, colle medesime prime equazioni del paragrafo quindicesimo, si potrebbero trovare le forze esteriori X, Y, Z.

34.

Se pei poligoni rigidi, ovvero completamente o solo in parte elastici, si farà col calcolo delle differenze finite, ciò che si è fatto superiormente col calcolo differenziale per le curve, si troveranno dei risultamenti, i quali avranno cogli esposti e dimostrati superiormente, quei medesimi rapporti che hanno quelli, che trovai in altra occasione pei poligoni co-

gli analoghi delle curve, che si trovano nella Meccanica analitica di Lagrange.

## NOTA.

Nel volume delle corrispondenze della scuola Politecnica di Francia pubblicato l'anno appena scorso vi è una breve memoria del celebre Poisson sulle linee elastiche a doppia curvatura. Le tre equazioni, che egli trova necessarie per l'equilibrio, sono differenti dalle nostre, più non si possono dedurre tutte da queste. Affinchè si vegga l'origine di questa differenza, esporrò quì in breve i ragionamenti, che egli fa in quella memoria per trovare le dette tre equazioni.

Si consideri la curva in equilibrio composta di due parti, precisamente come si è fatto al paragrafo vigesimosesto, e si ritengano tutte le denominazioni usate già più volte.

Per la teorica dei momenti saranno $L$, $\frac{c}{\omega}\mu$, $\frac{dx}{ds}\xi$ i rispettivi momenti delle forze esteriori, della elasticità, e della torsione rispetto della retta parallela all'asse delle $x$, e che passa pel punto corrispondente alle coordinate $x$, $y$, $z$: così saranno $M$, $-\frac{c}{\omega}\mu$, $-\frac{dy}{ds}\xi$; $N$, $-\frac{c''}{\omega}\mu$, $-\frac{dz}{ds}\xi$ i momenti analoghi rispetto delle altre due rette parallele rispettivamente agli assi delle $y$, $z$ e che passano pel punto a cui corrispondono le coordinate $x$, $y$, $z$. Quindi, affinchè la prima parte della curva non concepisca verun movimento di rotazione intorno al punto corrispondente alle stesse coordinate $x$, $y$, $z$, dovranno sussistere contemporaneamente le tre equazioni seguenti

$$L - \frac{c}{\omega}\mu - \frac{dx}{ds}\xi = 0,$$

$$M - \frac{c'}{\omega}\mu - \frac{dy}{ds}\xi = 0,$$

$$N - \frac{c''}{\omega}\mu - \frac{dz}{ds}\xi = 0:$$

nelle quali, ponendo in luogo delle L, M, ed N ciò, che esse rappresentano, si ottengono le suddette di Poisson.

Prescindendo dalla tensione della curva in equilibrio, i rapporti, che ha la quistione trattata da Poisson con quella trattata da noi superiormente, sono i seguenti. Egli suppone tacitamente che, la prima parte della curva possa concepire qualunque movimento di rotazione intorno al punto a cui corrispondono le coordinate $x, y, z$, per cui la natura del sistema costituito dalla curva non rende impossibile verun movimento di rotazione intorno al punto stesso: noi invece abbiamo tacitamente supposto impossibile, che la prima parte rotasse intorno al raggio di curvatura corrispondente al medesimo punto dato dalle coordinate $x, y, z$, movimento, il quale se accadesse, farebbe cambiare natura al sistema, rendendo la linea discontinua; onde pel nostro equilibrio non fa d'uopo, che le forze esteriori applicate alla prima parte abbiano la proprietà necessaria per impedire insieme agli altri movimenti anche questo, essendo desso impossibile per la natura medesima del sistema. All' opposto, per Poisson, le forze esteriori debbono avere tali relazioni d' impedire insieme agli altri movimenti anche quest' ultimo, vale a dire, oltre le relazioni esposte pel caso nòstro, esse dovranno avere quella, che è necessaria per l' annullamento della somma dei loro momenti rispetto della retta nella quale cade il raggio di curvatura.

Tutte queste proprietà o relazioni sono appunto espresse dalle tre equazioni anzi-esposte. Di fatto, si moltiplichino esse separatamente per

$$\frac{c}{\omega}, \frac{c'}{\omega}, \frac{c''}{\omega}; \text{per } \frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}; \text{e per } d\frac{dx}{ds}, d\frac{dy}{ds}, d\frac{dz}{ds};$$

e si sommino fra loro, le tre risultanti dalla prima di queste operazioni, le tre risultanti dalla seconda, e le tre provenienti dall' ultima, e si avranno le tre equazioni seguenti

$$\frac{c}{\omega} L + \frac{c'}{\omega} M + \frac{c''}{\omega} N - \mu = 0,$$

$$\frac{dx}{ds} L + \frac{dy}{ds} M + \frac{dz}{ds} N - \xi = 0,$$

$$L\, d\frac{dx}{ds} + M\, d\frac{dy}{ds} + N\, d\frac{dz}{ds} = 0,$$

precisamente equivalenti a quelle di Poisson dalle quali si sono desunte.

Le prime due di queste ultime equazioni sono visibilmente le stesse nostre esposte ai paragrafi diciottesimo, diciannovesimo, ed esprimono che non vi sarà movimento di rotazione nè intorno la tangente nè intorno alla nota retta perpendicolare al piano osculatore; e la terza esprime evidentemente, per quello che si è detto al paragrafo vigesimoterzo, che è nulla la somma dei momenti delle forze esteriori, rispetto della retta nella quale cade il raggio di curvatura della linea in equilibrio.

Nella ipotesi di Poisson, stante l'ultima equazione esposta e ciò che si è trovato alla fine del paragrafo diciannovesimo, sarà $d\xi = 0$; cioè costante la torsione: proprietà singolarissima dimostrata altrimenti dallo stesso Poisson.

# RISOLUZIONE DELL' EQUAZIONE GENERALE COMPLETA DI SECONDO GRADO A TRE INDETERMINATE

# MEMORIA

DI GEMINIANO POLETTI

PRESENTATA

DAL SIG. CONTE GIOVANNI PARADISI SOCIO

*nel dì* 27. *Gennajo* 1819.

ED APPROVATA

DAL SOCIO SIG. PROFESSOR BORDONI

Fra gl' industriosi cultori della scienza de' numeri occupa altissimo seggio l' immortale Lagrange. Questo sublime spirito con acute viste, con ingegnosi artifizii, con dirette dimostrazioni cotanto arricchì una parte di questo vastissimo campo, che proseguendola a coltivare dura cosa non sarebbe raccorre in essa nuovi frutti. E in vero assaissimo mi hanno giovato e le sottili quistioni intorno varie proprietà de' numeri da lui disputate, e le profonde disquisizioni da lui fatte sovra le equazioni indeterminate di secondo grado, per giugnere alla soluzione dell' equazione generale completa parimente di secondo grado a tre indeterminate. Risoluzione che non priva di novità estimo, e la quale è scopo de' ragionamenti, e calcoli che passo ad esporre.

§. 1. L' equazione generale completa di secondo grado a tre indeterminate, mentre si voglia risolverla in numeri razionali, si può ridurre ad una forma più semplice.

L' enunciata equazione è

(H) $au^2+buv+cv^2+du+ev+fw^2+gvw+huw+iw+k=0$

esprimendo i coefficienti $a, b, c$, ec. $k$ numeri interi, ed $u$, $v$, $w$ le tre indeterminate. Risolta per $u$ si troverà

$$2au+bv+hw+d=\sqrt{[(bv+hw+d)^2-4a(cv^2+ev+fw^2+gvw+iw+k)]}$$

ove le $u, v, w$ dovendo rappresentare numeri razionali è mestieri, che la quantità sotto il vincolo radicale

$$(bv+hw+d)^2-4a(cv^2+ev+fw^2+gvw+iw+k)=(b^2-4ac)v^2+2(bh-2ag)vw$$
$$+2(bd-2ae)v+(h^2-4af)w^2+2(hd-2ai)w+d^2-4ak$$

sia un numero quadrato. Chiamato adunque questo $z^2$, e fatto per abbreviazione

$$\begin{aligned} b^2-4ac &= \alpha \\ bh-2ag &= \beta \\ bd-2ae &= \gamma \\ h^2-4af &= \delta \\ hd-2ai &= \varepsilon \\ d^2-4ak &= \varphi, \end{aligned}$$

avremo

I.ª $$2au+bv+hw+d=\pm z$$

$$z^2=\alpha v^2+2\beta vw+2\gamma v+\delta w^2+2\varepsilon w+\varphi.$$

Parimente sciolta questa ultima equazione per rispetto alla $v$ ricaveremo l' altra

$$\alpha v+\beta w+\gamma=\sqrt{[(\beta w+\gamma)^2-\alpha(\delta w^2+2\varepsilon w+\varphi)+\alpha z^2]}$$

la razionalità della quale vuole che l' espressione

$$(\beta w+\gamma)^2-\alpha(\delta w^2+2\varepsilon w+\varphi)+\alpha z^2=(\beta^2-\alpha\delta)w^2$$
$$+2(\beta\gamma-\alpha\varepsilon)w+\gamma^2-\alpha\varphi+\alpha z^2$$

uguagli un quadrato che diremo $y^2$. E quindi otterremo

II.ª $$\alpha v+\beta w+\gamma=\pm y$$

$$y^2=Aw^2+2Bw+C+\alpha z^2$$

essèndo

$$\begin{aligned} A &= \beta^2-\alpha\delta \\ B &= \beta\gamma-\alpha\varepsilon \\ C &= \gamma^2-\alpha\varphi. \end{aligned}$$

In fine risolvendo per rapporto alla $w$ l' equazione

$$y^2=Aw^2+2Bw+C+\alpha z^2$$

ci risulterà

$$Aw + B = \surd ( B^2 - A ( C + \alpha z^2 ) + Ay^2 ).$$

E poichè il primo membro è razionale, nulla s'oppone di designarne con $x^2$ il secondo, e così essa equazione si convertirà nelle due seguenti

$$\text{III.}^a \qquad Aw + B = x$$

$$(\pi) \qquad x^2 = Ay^2 - A\alpha z^2 + B^2 - AC .$$

Onde apertamente scorgesi che l' equazione completa generale di secondo grado a tre indeterminate è stata trasformata nella equazione $(\pi)$ di forma più semplice della (H).

§. 2. Quali condizioni si debbano soddisfare, acciocchè le $u$, $v$, $w$ acquistino valori in numeri interi atti a verificare la equazione (H).

Dalle equazioni $I^a$, $II^a$, $III^a$ del §.° precedente traesi

$$u = \frac{\pm z - hw - bv - d}{2a}$$

$$v = \frac{\pm y - \beta w - \gamma}{a}$$

$$w = \frac{\pm x - B}{A} .$$

Perchè adunque le $u$, $v$, $w$ esprimano numeri interi occorre: 1° che le $x$, $y$, $z$ acquistino parimenti de' valori in numeri interi, i quali verifichino la $(\pi)$: 2° che $\pm x - B$ sia un multiplo di A: 3° che sia divisibile esattamente per $a$ l' espressione $\pm y - \beta w - \gamma$: e 4° che $2a$ sia divisore esatto di $\pm z - hw - bv - d$. A cagione delle quali condizioni, posciachè si avranno trovati tutti li possibili valori in numeri interi delle indeterminate $x$, $y$, $z$, converrà: che quelli della $x$ in tutto od in parte dieno $\frac{\pm x - B}{A}$ numero intero: che i valori della $w$ combinati con quelli della $y$ rendano intero $\frac{\pm y - \beta w - \gamma}{a}$: e che altresì i ricavati valori delle $w$, $v$, assieme con quelli della $z$ producano quoti esatti nella divisione $\frac{\pm z - hw - bv - d}{2a}$.

§. 3. Egli è manifesto che domandandosi la soluzione della (H) in numeri semplicemente razionali, in questo caso non si ha da soddisfare altra condizione, che quella di esprimere con analoghi numeri le $x$, $y$, $z$.

§. 4. Risolvere in numeri razionali, o interi l' equazione indeterminata

$$x^2 = Ay^2 + Bz^2 + C,$$

essendo A, B, C numeri interi.

Attribuito a una qualunque delle indeterminate $x$, $y$, $z$ un valore razionale, od intero, ne risulterà una equazione di secondo grado a due indeterminate.

Infatti se diasi alla indeterminata $z$ un valore razionale $\frac{d}{D}$, in questo caso si dovrà risolvere l'equazione della forma $Dx^2 = Ey^2 + F$. E dato che vi si attribuisca un valore intero G, l' equazione da sciogliersi sarà $x^2 = Ay^2 + BG^2 + C$. Ora non avremo da superare assai difficoltà per ottenere la risoluzione di queste equazioni, perchè basterà applicarvi i metodi di Lagrange (*).

Ma siffatte risoluzioni della proposta sono alquanto imperfette. 1.° Perchè ad ogni valore attribuito a cagion d' esempio alla $z$ si ottiene una particolare equazione in $x$, $y$; e quindi riesce il calcolo sommamente laborioso. 2.° Perchè (e questa è più salda ragione) l' assegnato valore della $z$ è arbitrario, e non già desunto dai rapporti, che legano questa indeterminata colle altre due. Per le quali ragioni crederemmo di non far cosa inutile rivolgendoci ad investigare la soluzione diretta della proposta equazione, pel qual fine passeremo a trattare le seguenti questioni.

§. 5. Data l' equazione

$$x^2 = Ay^2 + Bz^2 + C,$$

---

(*) Mem. de Berlin an. 1767.

nella quale A, B, C sono numeri interi, e le $x, y, z$ dinotano numeri fratti razionali, trasformarla in un' altra, che abbia i suoi coefficienti non divisibili esattamente per numeri quadrati

Siccome le $x, y, z$ esprimono frazioni razionali, così far potrassi $x = \frac{x'}{t'}$, $y = \frac{y'}{t'}$, $z = \frac{z'}{t'}$, dove scorgesi che $t'$ dinota il comune denominatore delle $x, y, z$. Quindi dall'equazione data si otterrà l' altra

$$x'^2 = Ay'^2 + Bz'^2 + Ct'^2 .$$

Ora dicansi $h'^2$, $k'^2$, $l'^2$ i più grandi divisori quadrati, che rispondentemente appartengono ai coefficienti A, B, C; e facciasi $A = h'^2A'$, $B = k'^2B'$, $C = l'^2C'$. Sostituiti questi valori nella precedente equazione, si otterrà

$$x'^2 = A'h'^2y'^2 + B'k'^2z'^2 + C'l'^2t'^2.$$

E posto $h'y' = y''$, $k'z' = z''$, $l't' = t''$, si avrà

$$x'^2 = A'y''^2 + B'z''^2 + C't''^2,$$

ove i numeri A', B', C' sono sibbene interi, ma non divisibili per numeri quadrati .

§. 6. Quindi chiaro apparisce che avremo risolta in numeri razionali l'equazione $(\pi)$, tostochè saremo giunti a risolvere in numeri interi l' equazione della forma $x^2 = Ay^2 + Bz^2 + Ct^2$, rappresentando A, B, C numeri interi non divisibili per quadrati. All' effetto di ottenere la qual risoluzione, vuolsi primamente rivolgere le nostre indagini allo scioglimento del seguente problema .

§. 7. Risolvere in numeri interi l' equazione

$$(I) \qquad x^2 + Ay^2 = z^2 + Ct^2 ,$$

esprimendo le $x, y, z, t$ numeri primi tra loro, ed A, C due numeri interi.

Pongasi

$$z^2 + Ct^2 = s$$

essendo $s$ una nuova indeterminata, si avrà

$$x^2 + Ay^2 = s .$$

Denominisi poi $\omega$ il massimo comun divisore tra $x, y$; e $\theta$ quello fra $z, t$; talchè sia $x = \omega x_{(1)}$, $y = \omega y_{(1)}$, $z = \theta z_{(1)}$, $t = \theta t_{(1)}$.

Sostituiti questi valori delle $x, y, z, t$ nelle due ultime equazioni, avremo

$$x^2_{(1)} + Ay^2_{(1)} = \frac{s}{\omega^2}$$

$$z^2_{(1)} + Ct^2_{(1)} = \frac{s}{\theta^2} ,$$

dove $x_{(1)}$, $y_{(1)}$ esprimono due numeri primi tra loro, e medesimamente lo dinotano $z_{(1)}$, $t_{(1)}$. Inoltre dovendo essere $\frac{s}{\omega^2}$, $\frac{s}{\theta^2}$ due numeri interi; per ciò, fatto $s = \omega^2 s'$, $s = \theta^2 s''$, si otterranno le equazioni

$$(1) \qquad x^2_{(1)} + Ay^2_{(1)} = s'$$

$$(2) \qquad z^2_{(1)} + Ct^2_{(1)} = s''$$

$$(3) \qquad s' = \frac{\theta^2 s''}{\omega^2} ,$$

l'ultima delle quali ci mostra che $\omega^2$ debb' essere divisore esatto di $\theta^2 s''$. Ora nè $\omega$, nè alcuno de' suoi divisori semplici, i quali diremo $\omega'$, $\omega''$, $\omega'''$ ec., può dividere $\theta$. Imperciocchè vogliasi $\theta = \mu\omega$, ovvero $\theta = \mu'\omega'$ ec. si avranno le equazioni

$x = \omega x_{(1)}$, $y = \omega y_{(1)}$, $z = \mu\omega z_{(1)}$, $t = \mu\omega t_{(1)}$

$x = \omega'\omega''\omega''' \ldots . x_{(1)}$, $y = \omega'\omega''\omega''' \ldots . y_{(1)}$, $z = \mu'\omega' z_{(1)}$, $t = \mu'\omega' t_{(1)}$;

le quali tantosto ci appalesano che le $x, y, z, t$ non sarebbero prime tra loro; il che è contro la supposizione. Onde conchiudesi che se debb' essere $s'$ un intero, converrà che $\omega^2$ divida esattamente $s''$. Poniamo adunque $s'' = \omega^2 s'''$, l'equa-

zione (3) ci darà $s' = \theta^2 s'''$, e le equazioni (1), (2) addiveranno

$$x_{(1)}^2 + Ay_{(1)}^2 = \theta^2 s''' \tag{4}$$

$$z_{(1)}^2 + Ct_{(1)}^2 = \omega^2 s''' . \tag{5}$$

Dal che apertamente si comprende, che la soluzione della proposta ha nelle equazioni (4), (5) i suoi fondamenti. Ma si osservi che ciascuno dei numeri $\theta$, $s'''$, $\theta^2$, $\theta^2 s'''$ dev' essere divisore esatto di $x_{(1)}^2 + Ay_{(1)}^2$: e che trovato $s'''$ dalla (4), l' equazione (5) ci presenta da cercare soltanto le indeterminate $z_{(1)}$, $t_{(1)}$, $\omega$, essendo i numeri $\omega$, $\omega^2$ fattori di $z_{(1)}^2 + Ct_{(1)}^2$. Le quali osservazioni ci scuoprono, che sì la soluzione della (4), come quella della (5) hanno base in alcuni principj sviluppati dal celeberrimo Legendre nella sua Opera *Essai sur la théorie des nombres;* principj in massima parte ricavati dalle investigazioni numeriche del sommo Lagrange. E perchè giova ch' essi siano conosciuti, acciò che chiare appariscano le predette soluzioni, per questo ci avvisiamo semplicemente rammentarli, il leggitore potendo all' uopo ricorrere alle Opere dei due sullodati Geometri, quantunque volte amasse apprenderne le loro dimostrazioni.

§. 8. Qualunque divisore della formola $z^2 + at^2$, nella quale $z$, $t$ esprimono due numeri primi tra loro, ed $a$ dinota un numero intero positivo o negativo, può essere rappresentato dalla formola quadrativa

$$py'^2 + 2qy't + rt^2 ,$$

i cui numeri $p$, $q$, $r$ sono dati dalla seguente equazione $\frac{q^2 + a}{p} = r$ (*).

---

(*) Legendre. Essai sur la théor. des nomb. (136), (137) Ed. 1.ª

Dal rinomato Lagrange si è poi dimostrato (*) che la formola indeterminata $py'^2 + 2qy't + rt^2$ può essere trasformata in un' altra simigliante, nella quale il coefficiente $2q$ riducesi ad aver valore minore di ciascuno de' coefficienti estremi $p$, $r$, quando avvenisse mai ch' esso li eccedesse, senza che per ciò rimanga distrutta l' equazione di condizione $rp - q^2 = a$. Per lo che eseguita che sia l' enunciata riduzione si conchiude (**).

1.° Che ogni divisore dell' espressione $z^2 + at^2$, mentre sia $a > 0$, può essere rappresentato dalla formola $py'^2 + 2qy'y'' + ry''^2$: avendosi $rp - q^2 = a$, $2q < p$ ed $r$; e per conseguenza $q < \sqrt{\frac{a}{3}}$.

2.° Che ogni divisore di $z^2 - a't^2$ può esprimersi da $py'^2 + 2qy'y'' - ry''^2$: essendo $p$, $q$, $r$ dati dall' equazione $rp + q^2 = a'$, ed essendo pure $2q < p$ ed $r$; onde risulta $q < \sqrt{\frac{a'}{5}}$.

In amendue i sopraddetti casi le $y'$, $y''$ debbono essere due numeri primi tra se. La qual condizione ci conduce ad affermare, che ogni numero compreso nella formola $py'^2 + 2qy'y'' \pm ry''^2$ è necessariamente divisore della formola $z^2 + at^2$ (***).

Gioverà pure avvertire, che ogni divisore quadrativo $py'^2 + 2qy'y'' - ry''^2$ della formola $z^2 - a't^2$ debb' essere accoppiato col suo inverso $ry'^2 + 2qy'y'' - py''^2$. Le quali due formole ponno divenire identiche: e questo accade, quando $a'$ abbia tal valore che dipendentemente da esso si possano determinare due numeri $h$, $k$, che verifichino l' equazione $h^2 - a'k^2 = 1$ (****).

§. 9. Dichiariamo i menzionati principj con qualche esem-

---

(*) Mem. de Berlin. an. 1773.
(**) Legendre Op. cit. (138).
(***) Lo stesso (139).
(****) Lo stesso (90).

pio, il quale ci servirà in appresso a vie meglio schiarire l' equazione, che ci siamo proposti di risolvere.

Abbiansi a trovare i divisori quadrativi della formola $z^2 + 89t^2$.

Le condizioni che si deggiono soddisfare (§. precedente) sono : $pr - q^2 = 89$, $2q < p$ ed $r$; e $q < \sqrt{\frac{89}{3}}$ ossia $< 6$.

Onde si avranno i seguenti risultati

1.° Sia $q = 0$, si avrà $pr = 89$; quindi $p = 1$, $r = 89$

2.° Sia $q = 1$, ne verrà $pr = 90$; onde
$$\begin{cases} p = 3, & r = 30 \\ p = 5, & r = 18 \\ p = 6, & r = 15 \\ p = 9, & r = 10 \\ p = 45, & r = 2 \end{cases}$$

3.° Sia $q = 2$, sorgerà $pr = 93$, il qual numero non è decomponibile in due fattori $> 4$.

4.° Sia $q = 3$, sarà $pr = 98$; e perciò $p = 7$, $r = 14$.

5.° Sia $q = 4$, si avrà $pr = 105$, numero che non contiene fattori $> 8$.

6° Sia $q = 5$, si otterrà $pr = 114$, dal qual numero non si può ricavare alcun fattore $> 10$.

Adunque disegnati i chiesti divisori colle lettere A', B', C' ec., saranno

$$\begin{aligned} A' &= y'^2 + 89y''^2 \\ B' &= 3y'^2 + 2y'y'' + 30y''^2 \\ C' &= 5y'^2 + 2y'y'' + 18y''^2 \\ D' &= 6y'^2 + 2y'y'' + 15y''^2 \\ E' &= 9y'^2 + 2y'y'' + 10y''^2 \\ F' &= 45y'^2 + 2y'y'' + 2y''^2 \\ G' &= 7y'^2 + 6y'y'' + 14y''^2. \end{aligned}$$

E di quì si conchiude che la formola $z^2 + 89t^2$ ha sette divisori quadrativi.

§. 10. Altre proprietà concernenti li divisori quadrativi della formola $z^2 + at^2$ sono state poste in lume dal Legendre nella citata Opera, alla quale può opportunamente riportarsi chiunque ami esserne pienamente istruito. Soltanto avvertiremo che per li casi delle particolari soluzioni delle equazioni, le quali è scopo nostro lo svolgere, potranno essere utili le tavole che il prelodato Autore ha compilate, che contengono i divisori quadrativi della formola $t^2 \pm cu^2$, quando $c$ rappresenta un numero nè quadrato nè divisibile per alcun quadrato, le quali si trovano inserite alla fine di essa Opera, essendo contraddistinte coi numeri III, IV, V, VI (*).

§. 11. Oltre il metodo semplicemente enunciato (§. 8) di trovare i divisori quadrativi della formola $z^2 \pm at^2$, apertamente vedesi, ch' è mestieri per la risoluzione delle equazioni (4), (5), (§. 7) conoscer eziandio quello, mediante il quale si determinano i divisori quadrativi della medesima formola, che includono il prodotto di parecchi divisori similmente quadrativi; il perchè indicheremo la soluzione dei due seguenti problemi relativi ai detti divisori (**).

I.° Dell'espressione $z^2 + at^2$ dati i due divisori quadrativi

$$\Delta = p'y'^2 + 2qy'y'' + ry''^2$$
$$\Delta' = p'y_1'^2 + 2q'y_1'y_1'' + r'y_1''^2,$$

trovare il divisore quadrativo del prodotto $\Delta\Delta'$.

Si avrà

$$\Delta\Delta' = pp'\,Y^2 + 2\varphi\,YY' + \psi Y'^2,$$

essendo

$$Y = (y' \pm ny'')(y_1' - n'y_1'') \pm \psi y''y_1''$$
$$Y' = (py' + qy'')y_1'' \mp (p'y_1' + q'y_1'')y'';$$

e determinandosi le quantità $n$, $n'$, $\varphi$, $\psi$ dalle seguenti equazioni

---

(*) Per la formazione delle indicate tavole veggasi l' Op.° cit.° (213).

(**) Per la dimostrazione del primo veggasi l'Op. cit di Legendre (362) (363).

$$(\alpha) \qquad pn \mp q = p'n' + q'$$

$$(\beta) \qquad \varphi = pn \mp q = p'n' + q'$$

$$(\gamma) \qquad \psi = \frac{\varphi^2 + a}{pp'},$$

ove in questa ultima dovrà essere $pp'$ divisore esatto di $\varphi^2 + a$.

Notisi che a cagion del doppio segno esistente nell' equazione $(\alpha)$ il problema considerato generalmente ha due soluzioni: però non è suscettibile di averne più di due.

II.° Posto che i dati divisori quadrativi sieno simili ed espressi da

$$\Delta = py'^2 + 2qy'y'' + ry''^2$$
$$\Delta' = py_1'^2 + 2qy_1'y_1'' + ry_1''^2,$$

determinare parimente il divisor quadrativo del prodotto $\Delta\Delta'$.

Ne' valori precedenti sostituiscansi $p$, $q$, $r$ alla vece di $p'$, $q'$, $r'$, si otterrà il prodotto

$$\Delta\Delta' = p^2Y^2 + 2\varphi YY' + \psi Y'^2,$$

dove sarà

$$Y = (y' - ny'')(y_1' - ny_1'') - \psi y''y_1''$$
$$Y' = p(y'y_1'' + y_1'y'') + 2qy''y_1'':$$

e le equazioni $(\beta)$, e $(\gamma)$ si convertiranno nelle altre

$$\varphi = np + q, \quad \psi = \frac{\varphi^2 + a}{p^2}.$$

Ma abbiamo enunciato che è $rp - q^2 = a$ (§. 8), per conseguente ne verrà

$$\psi = \frac{r + 2nq}{p} + n^2.$$

Per tanto determinati i più piccoli valori, che soddisfanno all'equazione $r = mp - 2nq$ ricavata dal porre $\frac{r+2nq}{p} = m$ numero intero, si sarà adempiuto ad ogni condizione, e si avrà

$$\varphi = q + np, \quad \psi = m + n^2.$$

Il prodotto $\Delta\Delta'$ ha eziandio un valore della forma $z^2 + at^2$, che si determina nel seguente modo.

Facciasi $py' + qy'' = x$, $py_1' + qy_1'' = x'$, si avrà

$$\Delta\Delta' p^2 = (x^2 + ay''^2)(x'^2 + ay_1''^2),$$

e da quì

$$\Delta\Delta' = \frac{(xx' - ay''y''_1)^2 + a(xy_1'' + x'y'')^2}{p^2}.$$

Ora nella quantità $xx' - ay''y''_1$ sostituiti i valori delle $x$, $x'$, e quello di $a = rp - q^2$ si otterrà

$$\Delta\Delta' = (py'y_1' + qy'y_1'' + qy_1y'' + ry''y''_1)^2 + a(y'y''_1 - y_1'y'')^2,$$

che è il cercato prodotto.

§. 12. Da ciò che si è detto nel §. precedente non è disagevole lo scorgere, come si debba procedere qualora abbiasi da determinare il quadrato di un dato divisore quadrativo. Perciocchè in questo caso $\Delta'$ diventa identico a $\Delta$; onde avrassi pure una sola forma, perchè avendosi $y'y_1'' - y_1'y'' = 0$, l' ultimo valore di $\Delta\ \Delta'$ del §. precedente non serba più la forma quadrativa.

§. 13. In generale, siccome può esprimersi il prodotto di due dati divisori quadrativi uguali o disuguali con una formola della medesima natura, la quale è parimente un divisor quadrativo, così ne segue, che si potrà eziandio trovare un divisore quadrativo eguale al prodotto di parecchi altri divisori quadrativi. E se trattasi soltanto della forma de' prodotti, si potranno questi determinare facilmente senza darci briga di cercare il valore delle indeterminate inclusevi: il che rende il problema assai più semplice, attesochè basta operare sopra i coefficienti, i quali offrono un numero limitato di combinazioni.

Disegnati poi colle lettere A', B', C', .... i differenti divisori quadrativi pertinenti a una data formola $z^2 + at^2$, e determinate, col mezzo del metodo sopra enunciato, le formole rispondenti ai diversi prodotti A'A', A'B', A'C',....; B'B', B'C'...., se rinvengasi il prodotto A'B' di forma eguale a C', e quello di A' C' sì della forma D', come della forma E', si scriverà $A'B' = C'$, $A'C' = \begin{cases} D' \\ E' \end{cases}$; e lo stesso sarà notato per gli altri

prodotti. Essendo determinati i prodotti concernenti le combinazioni a due a due, col mezzo di essi si ricaveranno quelli, che spettano alle combinazioni a tre a tre, e così di seguito. E quì avvertiremo che l'espressione B' B' è diversa da $B'^2$. Perocchè colla prima dinotiamo il prodotto di due simili divisori quadrativi avente soltanto le indeterminate diverse, e colla seconda rappresentiamo il quadrato del divisore B', e conseguentemente abbiamo i due fattori B', B' identici tanto ne' coefficienti, quanto nelle indeterminate. Sovra di che rammenteremo di nuovo che $B'^2$ è suscettibile di una sola forma, e B' B' ne può acquistar due.

Premesse le sopraddette cose intorno ai divisori quadrativi della formola $z^2 + at^2$, passeremo col soccorso di esse a condurre in pieno lume le risoluzioni delle equazioni (4) e (5).

§. 14. Risolvere in numeri interi l'equazione

$$(4) \qquad x_{(1)}^2 + Ay_{(1)}^2 = \theta^2 s'''^2,$$

essendo A un numero intero.

Egli è manifesto che avremo risoluta l'equazione proposta, qualora saremo giunti ad esprimere le $x_{(1)}$, $y_{(1)}$, $\theta$, $s'''$ in funzioni intere d' indeterminate independenti. Il che sarà da noi fatto nel seguente modo.

Primamente si determinino tutti li divisori quadrativi della formola $x_{(1)}^2 + Ay_{(1)}^2$ col metodo indicato nel §. 8; e dicansi A', B', C', D', .... Dappoi a cagione che il secondo membro della proposta rappresenta il prodotto del quadrato dell' indeterminata $\theta$ per l'altra indeterminata $s'''$, si cerchino (§.$^i$ 11, 12, 13) i prodotti ch'esprimono tutte le possibili combinazioni $A'^2A'$, $A'^2B'$,....; $B'^2A'$, $B'^2B'$,....; $C'^2A'$.... Ciò trovato, si segnino quelli che hanno la forma $x_{(1)}^2 + Ay_{(1)}^2$: è chiaro che quanti saranno essi prodotti altrettante soluzioni si otterranno della data equazione. In seguito si uguagli ciascuno dei

marcati prodotti al primo membro della proposta. Da siffatte equazioni si ricaveranno i valori delle $x_{(1)}$, $y_{(1)}$ in funzione delle indeterminate indipendenti inchiuse nei suddetti prodotti. I quali uguagliando eziandio $\theta^2 s'''$ manifestamente scorgesi, che i loro divisori semplici quadrativi esprimeranno rispondentemente i valori delle $\theta$, $s'''$; e quindi anche le $\theta$, $s'''$ saranno funzioni delle sopraddette indeterminate indipendenti: E in tal guisa rimane sciolta la (4), la quale soluzione schiariremo più sotto con un esempio.

§. 15. Ini adesso denominati D, $D_{(1)}$, $D_{(2)}$ ec. i valori della $s'''$, che si ritraggono colla risoluzione dell'antecedente problema, e sostituiti questi valori nella equazione (5) si otterranno le eqnazioni $z^2_{(1)} + Ct^2_{(1)} = D\omega^2$, $z^2_{(1)} + Ct^2_{(1)} = D_{(1)}\omega^2$, $z_{(1)} + Ct^2_{(1)} = D_{(2)}\omega^2$ ec., le quali saranno tante, quanti sono i valori che può acquistare la $s'''$. Da qui poi apertamente scorgesi, che per ottenere la soluzione di queste ultime equazioni, basterà mostrare come se ne sciolga una qualunque; stantechè sono tutte della medesima forma: il che tosto passiamo a fare.

§. 16. Risolvere in numeri interi l'equazione

$$z^2_{(1)} + Ct^2_{(1)} = D\omega^2, \qquad (6)$$

essendo C, D due numeri interi.

Poichè $z_{(1)}$, $t_{(1)}$ sono numeri primi tra loro (§. 7.); perciò lo dovranno altresì essere $t_{(1)}$, D: come apertamente vedesi. Quindi si potranno sempre determinare due numeri $n$, $r$ tali, d'aversi $z_{(1)} = nt_{(1)} + Dr$. Ora sostituito nell'equazione proposta il valore di $z_{(1)}$, si otterrà

$$\left(\frac{n^2+C}{D}\right) t^2_{(1)} + 2nt_{(1)}r + Dr^2 = \omega^2,$$

dove essendo $t_{(1)}$, D due numeri primi tra se, dovrà essere

$n^2+C$ divisibile esattamente per D: per tanto posto $n^2+C=Dm$, si avrà

$$(7) \qquad mt_{(1)}^2 + 2nt_{(1)}r + Dr^2 = \omega^2,$$

la qual equazione ha il secondo membro privo del fattore costante D. E perchè hassi $n^2 - Dm = -C$, ne segue che il primo membro dell' equazione (7) è un divisore quadrativo della formola $z_{(1)}^2 + Ct_{(1)}^2$ (§. 8).

Altronde chiaramente vedesi, che si avranno da risolvere tante equazioni (7), quanti saranno i valori di $n$ che rendono $\frac{n^2+C}{D} = m$ numero intero: i quali valori sono compresi tra o, e $+\frac{1}{2}D$, siccome è noto dalla risoluzione dell' equazione di secondo grado a due indeterminate. Che se niuno dei valori di $n$ soddisferà la predetta condizione, allora si conchiuderà essere la proposta insolubile.

Ma supponiamo che si sieno trovati due valori di $m$, $n$, che verifichino la condizione $\frac{n^2+C}{D} = m$ numero intero; e dicansi $h$, $k$. L' equazione da risolversi sarà

$$(8) \qquad ht_{(1)}^2 + 2kt_{(1)}r + Dr^2 = \omega^2,$$

il cui primo membro rappresenta un divisore quadrativo della formola $z_{(1)}^2 + Ct_{(1)}^2$, come già è detto. Laonde per iscioglierla si cerchino dapprima tutti i divisori quadrativi della formola $z_{(1)}^2 + Ct_{(1)}^2$ (§. 8), e si disegnino colle $A_I$, $B_I$, $C_I$ ec. Dappoi si trovino i prodotti che rispondono ai quadrati $A_I^2$, $B_I^2$, $C_I^2$, ec. (§.$^i$ 11, 12), e si notino quelli che risultano della stessa forma del primo membro della proposta. Fatto ciò, si uguagli ciascuno di siffatti prodotti ad esso primo membro $ht_{(1)}^2 + 2kt_{(1)}r + Dr^2$, e si paragonino tra loro i pri-

mi coi secondi membri delle equazioni risultanti. Da questo confronto si ricaveranno per $t_{(1)}$ , $r$ dei valori espressi dalle indeterminate indipendenti comprese nei mentovati prodotti dei divisori quadrativi; i quali valori soddisferanno appunto allo scioglimento della proposta equazione . Ma anche questa soluzione sarà da noi posta in maggiore lume con un esempio, che quì sotto esporremo.

§. 17. Ora tutta si scuopre la soluzione della (I) . Conciossiachè vedemmo ch' essa dipendeva dalla determinazione delle $x_{(1)}, y_{(1)}, z_{(1)}, t_{(1)}, \omega, \theta$ soggette alle condizioni espresse dalle equazioni (4) e (5), le quali abbiamo appunto risolute nei §.i 14, 15 e precedente.

§. 18. Ma a vie meglio chiarire le soluzioni dei problemi sviluppati in essi paragrafi, proponiamoci di risolvere in numeri interi la seguente equazione

$$x^2 + 89y^2 = z^2 + 41t^2.$$

Abbiamo A = 89, C = 41, e la proposta rimane decomposta nelle altre due equazioni ( §. 7. )

$$(4)' \qquad x_{(1)}^2 + 89y_{(1)}^2 = \theta^2 s'''$$

$$(5)' \qquad z_{(1)}^2 + 41t_{(1)}^2 = \omega^2 s'''.$$

Ora vediamo come si risolva la (4)', e poscia scioglieremo la (5)' .

Si determinino tutti i divisori quadrativi della formola $x_{(1)}^2 + 89y_{(1)}^2$ . Essi di già si trovarono nel §. 9 , e sono i seguenti

$$\begin{aligned}
A' &= y'^2 + 89y''^2 \\
B' &= 3y'^2 + 2y'y'' + 30y''^2 \\
C' &= 5y'^2 + 2y'y'' + 18y''^2 \\
D' &= 6y'^2 + 2y'y'' + 15y''^2 \\
E' &= 9y'^2 + 2y'y'' + 10y''^2 \\
F' &= 45y'^2 + 2y'y'' + 2y''^2 \\
G' &= 7y'^2 + 6y'y'' + 14y''^2 .
\end{aligned}$$

Indi si cerchino i quadrati di questi divisori , adoperando

il metodo sopraccennato nel §. 11, dietro l'osservazione fatta nel §. 12; e ci risulterà $A'^2 = A'$, $B'^2 = E'$, $C'^2 = C'$, $D'^2 = E'$, $E'^2 = C'$, $F'^2 = A'$, $G'^2 = F'$. La riflessione pure fatta nel § 13 ci fa discernere, che le formole esposte nel citato §. 11 danno eziandio i valori de' prodotti $A'^2B'$, $A'^2C'$, ec. $B'^2B'$, $B'^2C'$,....; $C'^2D'$.... Quindi eseguiti a questo effetto gli opportuni calcoli, troveremo

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $A'^2A' = A'$ | $B'^2A' = E'$ | $C'^2A' = C'$ | $D'^2A' = E'$ | $E'^2A' = C'$ | $F'^2A' = A'$ | $G'^2A' = F'$ |
| $A'^2B' = F'$ | $B'^2B' = \begin{cases} B' \\ G' \end{cases}$ | $C'^2B' = \begin{cases} D' \\ G' \end{cases}$ | $D'^2B' = \begin{cases} B' \\ G' \end{cases}$ | $E'^2B' = \begin{cases} D' \\ G' \end{cases}$ | $F'^2B' = F'$ | $G'^2B' = D'$ |
| $A'^2C' = D'$ | $B'^2C' = \begin{cases} E' \\ F' \end{cases}$ | $C'^2C' = \begin{cases} A' \\ C' \end{cases}$ | $D'^2C' = \begin{cases} E' \\ F' \end{cases}$ | $E'^2C' = \begin{cases} A' \\ C' \end{cases}$ | $F'^2C' = D'$ | $G'^2C' = E'$ |
| $A'^2D' = G'$ | $B'^2D' = \begin{cases} B' \\ G' \end{cases}$ | $C'^2D' = \begin{cases} B' \\ G' \end{cases}$ | $D'^2D' = \begin{cases} D' \\ G' \end{cases}$ | $E'^2D' = \begin{cases} B' \\ G' \end{cases}$ | $F'^2D' = G'$ | $G'^2D' = B'$ |
| $A'^2E' = C'$ | $B'^2E' = \begin{cases} A' \\ C' \end{cases}$ | $C'^2E' = \begin{cases} E' \\ F' \end{cases}$ | $D'^2E' = \begin{cases} A' \\ C' \end{cases}$ | $E'^2E' = \begin{cases} E' \\ F' \end{cases}$ | $F'^2E' = C'$ | $G'^2E' = C'$ |
| $A'^2F' = B'$ | $B'^2F' = C'$ | $C'^2F' = E'$ | $D'^2F' = C'$ | $E'^2F' = E'$ | $F'^2F' = B'$ | $G'^2F' = A'$ |
| $A'^2G' = E'$ | $B'^2G' = \begin{cases} B' \\ D' \end{cases}$ | $C'^2G' = \begin{cases} B' \\ D' \end{cases}$ | $D'^2G' = \begin{cases} B' \\ D' \end{cases}$ | $E'^2G' = \begin{cases} B' \\ D' \end{cases}$ | $F'^2G' = E'$ | $G'^2G' = G'$ |

I quali risultati ci scuoprono quelle combinazioni, che producono la forma A'. E siccome queste si riducono alle sette seguenti $A'^2$ A', $B'^2E'$, $C'^2C'$, $D'^2E'$, $E'^2C'$, $F'^2A'$, e $G'^5F'$; così siam autorizzati a conchiudere, che altrettante sono le soluzioni della (4)'.

Per mettere poi in chiaro i valori che appartengono alle $x_{(1)}$, $y_{(1)}$, $\theta$, $s'''$, sviluppiamo una delle predette risoluzioni. Scelgasi quella corrispondente alla combinazione $B'^2E'$. Avendosi adunque $B'^2E' = \theta^2 s'''$, vale a dire $B' = \theta$, $E' = r'''$, sarà

$$\theta = 3y'^2 + 2y'y'' + 30y''^2$$

$$s''' = 9y_1'^2 + 2y_1'y_1'' + 10y_1''^2.$$

Inoltre essendo $B'^2 = E'$, ne verrà

$$\theta^2 = 9Y^2 + 2YY' + 10Y'^2,$$

il secondo membro della qual equazione, come si è asserito, è stato determinato colle formole del §. 11, avendo in vista che i divisori esprimenti $\theta$ erano identici, onde avremo

$$Y = y'^2 - 10y''^2,\ Y' = 6y'y'' + 2y''^2.$$

In adesso se moltiplicasi il valore di $\theta^2$ per quello di $s'''$, siccome il prodotto debb' essere della forma $x_{(1)}^2 + 89y_{(1)}^2$, così si ricaverà (§. 11. n.° II quando $\Delta\Delta'$ ha la forma di $z^2 + at^2$) $\theta^2 s''' = (9Yy_1' + Yy_1'' + Y'y_1' + 10Y'y_1'')^2 + 89(Yy_1'' - Y'y_1')^2$. Quindi confrontato il secondo membro di questa equazione col primo della (4)', si otterrà

$$x_{(1)} = 9Yy_1' + Yy_1'' + Y'y_1' + 10Y'y_1''$$

$$y_{(1)} = Yy_1'' - Y'y_1',$$

ossia

$$x_{(1)} = 9(y'^2 - 10y''^2)y_1' + (y'^2 - 10y''^2)y_1'' + 6(y'y'' + 2y''^2)y_1' + 10(6y'y'' + 2y''^2)y_1''$$

$$y_{(1)} = (y'^2 - 10y''^2)y_1'' - (6y'y'' + 2y''^2)y'.$$

Ora facciamo $y' = 0$, $y'' = 1$, come pure per maggior speditezza $y_1' = 0$, $y_1'' = 1$, risulterà $\theta = 30$, $s''' = 10$, $x_{(1)} = 10$, $y_{(1)} = -10$.

Passiamo adesso alla soluzione dell' equazione (5)'. Poichè hassi $s''' = 10$, la (5)' diventerà

$$(6)' \qquad z_{(1)}^2 + 41t_{(1)}^2 = 10\omega^2,$$

la quale si converte nell' altra (§. 16.)

$$(7)' \qquad mt_{(1)}^2 + 2nt_{(1)}r + 10r^2 = \omega^2,$$

essendo $z_{(1)} = nt_{(1)} + Dr$, $\frac{n^2+41}{10} = m$. Pertanto fatto $n = \pm(1, 2, 3, 4, 5)$, il valore di $n = 3$, darà $m = 5$; e quindi si avrà da risolvere l' equazione

$$(8)' \qquad 5t_{(1)}^2 + 6t_{(1)}r + 10r^2 = \omega^2,$$

il cui primo membro esprime un divisore quadrativo della formola $z_{(1)}^2 + 41t_{(1)}^2$ (§. 16). Ma sono i suoi fattori quadrativi (§. 8)

$$A_1 = z'^2 + 2z'z'' + 42z''^2$$
$$B_1 = 2z'^2 + 2z'z'' + 21z''^2$$
$$C_1 = 5z'^2 + 6z'z'' + 10z''^2$$
$$D_1 = 3z'^2 + 2z'z'' + 14z''^2$$
$$E_1 = 6z'^2 + 2z'z'' + 7z''^2 ;$$

per conseguente si otterranno gli altri risultati ( §.° 11 , 12 ) $A_1^2 = A$ , $B_1^2 = A_1$ , $C_1^2 = B_1$ , $D_1^2 = C_1$ , $E_1^2 = C_1$ . Dal che scuopresi, ch'essendo il primo membro dell' ultima equazione della forma $C_1$ , per ciò sarà essa suscettibile di due soluzioni , secondochè si porrà $\omega = D_1$ , $\omega = E_1$ . Teniamo addietro alla prima , e facciamo

$$\omega = 3z'^2 + 2z'z'' + 14z''^2 ,$$

con le formole del §. 11 si troverà

$$\omega^2 = 5Y^2 + 6YZ + 10Z^2 ,$$

dov' è

$$Y = -z'^2 + 4z'z'' + 6z''^2$$
$$Z = \quad z'^2 + 2z'z'' - 4z''^2 .$$

Perciò avremo

$$t_{(1)} = -z'^2 + 4z'z'' + 6z''^2$$
$$r = z'^2 \quad + 2z'z'' - 4z''^2 :$$

ed inoltre

$$z_{(1)} = 3t_{(1)} + 10r .$$

In adesso se poniamo $z'=1$, $z''=2$, otterremo $\omega = 63$ , $t_{(1)} = 31$ $z_{(1)} = -17$ , valori , che verificano la $(5)'$ .

Ma abbiamo ( §. 7. )

$$x = \omega x_{(1)} , \; y = \omega y_{(1)} , \; z = \theta z_{(1)} , \; t = \theta t_{(1)} ;$$

conseguentemente pel caso sviluppato traesi

$$x = 630 , \; y = -630 , \; z = -510 , \; t = 930 .$$

I quali valori sostituiti nella proposta rendono il primo membro identico al secondo .

Con calcoli analoghi potremo ottenere i valori delle

$x$, $y$, $z$, $t$, che danno tutte le altre soluzioni di cui la proposta è suscettibile.

Così rimane risoluta anche con esempio l'equazione (I). Ora vediamo come si debba procedere per iscioglière la stessa equazione, dato che il primo termine del secondo membro abbia coefficiente.

§. 19. Risolvere in numeri interi l'equazione

$$(II) \qquad x^2 + Ay^2 = Bz^2 + Ct^2,$$

esprimendo $x$, $y$, $z$, $t$ numeri primi tra loro, ed A, B, C numeri interi dati non divisibili per quadrati.

Dalla data equazione si trae l'altra

$$B(x^2 + Ay^2) = z'^2 + C_{(1)}t^2,$$

essendo $z' = Bz$, $C_{(1)} = BC$. E fatto

$$x^2 + Ay^2 = s,$$

si ottiene

$$z'^2 + C_{(1)}t^2 = Bs.$$

Nominato poi $\omega$ il massimo comun divisore tra $x$, $y$; e $\theta$ quello tra $z'$, $t$, pongasi

$$x = \omega x_{(1)}, \; y = \omega y_{(1)}, \; z' = \theta z_{(1)}, \; t = \theta t_{(1)}.$$

Inoltre fatto $\frac{s}{\omega^2} = s'$, $\frac{s}{\theta^2} = s''$, facilmente si comprende che $s'$ sarà numero intero, e che lo sarà parimente $s''$, attesochè B non è divisibile per numero quadrato. Quindi avremo

$$x_{(1)}^2 + Ay_{(1)}^2 = s'$$

$$z_{(1)}^2 + C_{(1)}t_{(1)}^2 = Bs''$$

$$s' = \frac{\theta^2 s''}{\omega^2} :$$

l'ultima delle quali equazioni per le stesse ragioni addotte nel §. 7, ci fa conoscere che $\frac{s''}{\omega^2}$ è un numero intero. Per tanto chiamato esso $s'''$, si otterranno le equazioni

$$(9) \qquad x^2_{(1)} + Ay^2_{(1)} = \theta^2 s'''$$

$$(10) \qquad z^2_{(1)} + C_{(1)} t^2_{(1)} = B\omega^2 s'''.$$

Ma posciachè l' equazione (9) ha la medesima forma di quella che trattammo nel §. 14; per conseguenza potremo risolverla collo stesso metodo, approfittando eziandio delle tavole compilate da Legendre già menzionate nel §. 10, per essere A non divisibile per numero quadrato. Sciolta così la (9) dicansi $D_{(1)}$, $D_{(2)}$, ec. i valori pertinenti alla $s'''$: è palese che avremo a risolvere successivamente le equazioni

$$(11) \begin{cases} z^2_{(1)} + C_{(1)} t^2_{(1)} = BD_{(1)}\omega^2 = B_{(1)}\omega^2 \\ z^2_{(1)} + C_{(1)} t^2_{(1)} = BD_{(2)}\omega^2 = B_{(2)}\omega^2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots, \end{cases}$$

dov' è $B_{(1)} = BD_{(1)}$, $B_{(2)} = BD_{(2)}$, ec. ed esprimono le $z_{(1)}$, $t_{(1)}$ numeri primi tra loro. Ora vediamo come il metodo esposto nel §. 16 valga eziandio a sciogliere la prima delle precedenti equazioni, giacchè all' uopo potremo medesimamente operare sovra ciascuna delle altre.

La condizione or ora dichiarata che sieno le $z_{(1)}$, $t_{(1)}$ numeri primi tra se, conduce a conchiudere $t_{(1)}$ primo a $B_{(1)}$: come non è malagevole il comprendere. Laonde esisteranno sempre dei valori per le due indeterminate $n$, $r$, che soddisferanno all' equazione

$$(12) \qquad z_{(1)} = nt_{(1)} + B_{(1)} r.$$

Sostituito questo valore nella prima delle (11), si otterrà

$$\left(\frac{n^2 + C_{(1)}}{B_{(1)}}\right) t^2_{(1)} + 2nt_{(1)} r + B_{(1)} r^2 = \omega^2.$$

Ma $t_{(1)}$, $B_{(1)}$ sono numeri primi tra loro; dunque dovrà esse-

re $n^2 + C_{(1)}$ divisibile per $B_{(1)}$ : e fatto $\frac{n^2+C_{(1)}}{B_{(1)}} = m$, si avrà

$$(13) \qquad m t^2_{(1)} + 2nt_{(1)}\, r + B_{(1)} r^2 = \omega^2 .$$

Risultamento che ci mostra, essere il primo membro divisore quadrativo della formola $z^2_{(1)} + C_{(1)} t^2_{(1)}$, perchè hassi $n^2 - B_{(1)} m = - C_{(1)}$ (§. 8).

Pure è manifesto che si avranno a risolvere tante equazioni (13), quanti saranno i valori di $n$, che rendono $\frac{n^2+C_{(1)}}{B_{(1)}}$ numero intero ; i quali valori sono compresi tra o , e $+ \frac{1}{2} B_{(1)}$.

Supponiamo che siansi trovati due valori $f, g$ rispondenti ai numeri $m$ , $n$ , che avverino la condizione $\frac{n^2+C_{(1)}}{B_{(1)}} = m$ numero intero : in questo caso l'equazione da risolversi sarà

$$f t^2_{(1)} + 2gt_{(1)}\, r + B_{(1)} r^2 = \omega^2,$$

ch'è della stessa forma della (8). Onde se per iscioglierla si segua il metodo esposto nel §. 16, basterà : 1.° trovare tutti i divisori quadrativi della formola $z^2_{(1)} + C t^2_{(1)}$ , che disegneremo colle $A_1$ , $B_1$ , $C_1$ , . . . . . ( §. 8 ) : 2.° cercare col metodo succennato nei §.$^i$ 11, 12 i quadrati $A^2_1$, $B^2_1$ , $C^2_1$ ec.: e 3.° contrassegnare tutte quelle formole , le quali saranno risultate di forma simile alla $f t^2_{(1)} + 2gt_{(1)}\, r + B_{(1)} r^2$. Ciò fatto ponendo ciascuna delle notate formole uguale al primo membro dell' ultima equazione , giugneremo ad esprimere le $t_{(1)}$ , $r$, $\omega$, con indeterminate independente ; e quindi mediante l' equazione (12) anche la $z_{(1)}$ .

In adesso riflettendo che è $z = \frac{z'}{B}$ , chiaro apparisce che

i valori delle $x$, $y$, $z$, $t$, che verificano la (II), sono $B\omega x_{(1)}$, $B\omega y_{(1)}$, $\theta z_{(1)}$, $B\theta t_{(1)}$. Ma col risolvere l'equazione (9) abbiamo determinati i valori delle $x_{(1)}$, $y_{(1)}$, $\theta$, e collo sciogliere l' equazione (10) abbiamo trovati i valori delle $z_{(1)}$, $t_{(1)}$, $\omega$; perciò rimane completamente risoluta la data equazione (II).

Vuolsi pure osservare, che la condizione di essere C non divisibile per alcun numero quadrato diverso dall' unità ci autorizza di moltiplicare la proposta equazione (II) pel coefficiente C, invece di moltiplicarla per B: ed i casi particolari ci appaleseranno a quale di essi coefficienti dovremo dare la preferenza.

§. 20. Risolvere in numeri razionali l' equazione

$$x^2 = Ay^2 + Bz^2 + C, \qquad \text{(III)}$$

disegnando $x$, $y$, $z$ le indeterminate, ed A, B, C numeri interi dati.

Tantosto vedesi che la soluzione di questa equazione si ricava da quanto è stato ragionato e calcolato nei §.$^i$ 5 e precedente.

§. 21. Niun ostacolo parimente s' incontrerà, alloraquando si vorrà risolvere in numeri razionali l'equazione completa generale di secondo grado a tre indeterminate. Imperocchè chiaramente si scorge, che per ottenere siffatta risoluzione non si avrà a far altro, che seguire i ragionamenti ed i calcoli esposti ne' §.$^i$ 1, 3, 5 e 19.

§. 22. Sin quì ci siamo condotti discutendo la soluzione in numeri razionali dell' equazione

$$x^2 = Ay^2 + Bz^2 + C.$$

Ora passeremo ad investigare come si possa risolvere essa equazione in numeri interi, giacchè è da questa soluzione, che vedremo potersi dedurre l' altra pure in numeri interi della equazione generale completa di secondo grado a tre indeterminate. Ma innanzi ogni altra cosa fia bene dimostrare la seguente proposizione.

§. 23. L' equazione indeterminata

$$x^2 = Ay^2 + Bz^2 + C ,$$

ove A , B , C sono numeri interi dati , al pari di quella di secondo grado a due indeterminate , ammette la soluzione in numeri interi di tante differenti equazioni della stessa forma , quanti sono i divisori quadrati del coefficiente C , e dove in ciascuna le tre indeterminate rappresentano numeri primi fra loro .

Infatti dicasi $\delta$ il massimo comun divisore tra $x , y , z$ , sicchè abbiasi $x = \delta x'$, $y = \delta y'$ , $z = \delta z'$ , si otterrà

$$x'^2 - Ay'^2 - Bz'^2 = \frac{C}{\delta^2} ,$$

il primo membro della qual equazione esprime un numero intero , e conseguentemente fa di mestieri che lo rappresenti altresì il secondo . Pertanto fatto $C = \delta^2 C'$ , ne verrà

$$x'^2 = Ay'^2 + Bz'^2 + C' ,$$

dove $x'$, $y'$, $z'$ sono numeri primi fra se . Ponendo adunque successivamente $\delta^2$ uguale ai divisori quadrati di C , rimane palese che si avranno tante equazioni della stessa forma della data, quanti sono i divisori quadrati di C, e che le indeterminate contenutevi esprimeranno numeri primi fra loro .

Fermato questo , vuolsi inoltre mostrare , come si risolva l' equazione $x^2 = Ay^2 + Bz^2 + C$ in un caso particolare : poichè facendo ciò , siamo d'avviso , che ci riuscirà più agevole il mettere in chiaro la soluzione generale di essa equazione .

§ 24. Risolvere in numeri interi l' equazione

$$(IV) \qquad x^2 = Ay^2 + Bz^2 + C ,$$

dove sono $x , y , z$ numeri primi fra loro , i coefficienti A , B, C numeri interi, ed A divisore di B , o viceversa B di A .

Diseguato con $\omega$ il massimo comun divisore tra $y , z$ , e posto

$$(14) \qquad y = \omega y' , z = \omega z' ,$$

otterremo

$$x^2 - C = A\omega^2 ( y'^2 + Qz'^2 ) ,$$

essendo $Q = \frac{B}{A}$ numero intero. Inoltre facciamo

$$(15) \qquad y'^2 + Qz'^2 = \tau ,$$

avremo

$$(16) \qquad x^2 - C = A\omega^2\tau ,$$

dove tantosto vedesi, che $\omega^2$ non può uguagliare i divisori quadrati di C, per esprimere $x$, $y$, $z$ numeri primi tra se; e che $x^2 - C$ debb' essere divisibile esattamente per A. Pertanto si cerchino i valori interi sì positivi come negativi della $x$, che rendono $\frac{x^2-C}{A}$ numero intero, i quali, come si è già altra volta rammentato, sono compresi tra o, e $+\frac{1}{2}A$. Succedendo che non n'esista alcuno che avveri essa condizione, conchiuderemo non potersi risolvere la (IV): e trovandone uno o più, procederemo oltre calcolando nel seguente modo.

Dicansi $a'$, $a''$, $a'''$, ec. i trovati valori della $x$, e pongasi

$$\frac{a'^2-C}{A} = P'$$

$$\frac{a''^2-C}{A} = P''$$

$$\frac{a'''^2-C}{A} = P'''$$

. . . . . ,

saranno P', P'', P''', ec. numeri interi positivi o negativi. Trovati poi tutti li divisori quadrati di ciascuno dei numeri P', P'', P''', ec., e denominati $f'^2$, $g'^2$, $h'^2$, ec. i divisori quadrati di P'; $f''^2$, $g''^2$, $h''^2$, ec. quelli di P''; $f'''^2$, $g'''^2$, $h'''^2$, ec. gli altri di P''', e così in seguito; potremo fare

$$P' = f'^2 p'_1 = g'^2 p'_2 = h'^2 p'_3 = \text{ec.}$$

$$P'' = f''^2 p''_1 = g''^2 p''_2 = h''^2 p''_3 = \text{ec.}$$

$$P''' = f'''^2 p'''_1 = g'''^2 p'''_2 = h'''^2 p'''_3 = \text{ec.}$$

. . . . . ,

dove $p'_1$, $p'_2$, $p'_3$, ec., $p''_1$, $p''_2$, $p''_3$, ec., $p'''_1$, $p'''_2$, $p'''_3$, ec., ec.

saranno numeri interi positivi o negativi. Ora poichè hassi dalla (16)

$$\frac{x^2-C}{A} = \omega^2\tau \ ,$$

agevolmente vedesi, che il secondo membro di questa ultima equazione dovrà uguagliare i valori di P', P'', P''', ec. Onde si avrà

$$\omega^2\tau = f'^2 p'_1 = g'^2 p'_2 = h'^2 p'_3 = \text{ec.}$$

$$\omega^2\tau = f''^2 p''_1 = g''^2 p''_2 = h''^2 p''_3 = \text{ec.}$$

$$\omega^2\tau = f'''^2 p'''_1 = g'''^2 p'''_2 = h'''^2 p'''_3 = \text{ec.}$$

. . . . . .

Dal che risulta

$$\omega = f', g', h', \text{ec.}, f'', g'', h'', \text{ec.}, f''', g''', h''', \text{ec.}, \text{ec.}$$

$$\tau = p'_1, p'_2, p'_3, \text{ec.}, p''_1, p''_2, p''_3, \text{ec.}, p'''_1, p'''_2, p'''_3, \text{ec.}, \text{ec.}$$

Sostituiti poi questi valori di $\tau$ di mano in mano nell' equazione (15) si otterranno le equazioni

$$(17)\ \begin{cases} y'^2 + Qz'^2 = p'_1 \ , \ y'^2 + Qz'^2 = p'_2 \ , \ y'^2 + Qz'^2 = p'_3 \ , \text{ec.} \\ y'^2 + Qz'^2 = p''_1 \ , \ y'^2 + Qz'^2 = p''_2 \ , \ y'^2 + Qz'^2 = p''_3 \ , \text{ec.} \\ \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ , \end{cases}$$

le quali potremo sciogliere col metodo insegnatoci da Lagrange (*).

Trovati adunque i valori della $x$ dipendentemente dalla condizione $\frac{x^2-C}{A}$ numero intero; indi quelli di $\omega$ mediante i divisori quadrati dei numeri P', P'', P''', ec., e per ultimo quelli di $y'$, $z'$ risolvendo le ultime equazioni (17); resteranno altresì determinati i valori delle $y$ , $z$ mediante le equazioni (14).

Ma dilucidiamo anche questa soluzione con un esempio.

---

(*) Mem. de Berlin. an. 1767.

§. 25. Sia proposta da risolversi in numeri interi l'equazione

$$x^2 = 11y^2 - 33z^2 - 217,$$

dove 11 è divisore di 33.

Poichè il numero 217 non ha alcun fattore che sia quadrato tranne l'unità, potremo sciogliere l'equazione proposta riguardando $x$, $y$, $z$ numeri primi tra loro. Avendo adunque $Q = -\frac{33}{11} = -3$, le equazioni (15), (16) addiverranno

$$y'^2 - 3z'^2 = \tau$$

$$x^2 + 217 = 11\omega^2\tau,$$

essendo $y = \omega y'$, $z = \omega z'$. Si cerchino adesso i numeri $x$, che rendono $\frac{x^2+217}{11}$ numero intero, si troverà per $x$ il numero 5. Quindi sarà $P' = 22$, il qual numero non avendo alcun fattore quadrato infuori dell'unità, hassi $P' = 1^2 . 22 = \omega^2\tau$; onde si ritrae $\omega = 1$, $\tau = 22$, i quali risultati ci danno la prima delle (17)

$$y'^2 - 3z'^2 = 22.$$

Ora risolta questa ultima equazione col noto metodo, troveremo che la soddisfanno $y' = 7$, $z' = 3$; e perciò avremo $x = 5$, $y = 7$, $z = 3$.

§. 26. Passiamo adesso a risolvere in numeri interi l'equazione

$$(V) \qquad x^2 = Ay^2 + Bz^2 + C,$$

dove $x$, $y$, $z$ esprimono numeri primi fra loro, ed i coefficienti A, B, C al solito numeri interi.

Si trovi il massimo comun divisore di A, B, che diremo F, talchè sia $A = FM$, $B = FN$: inoltre si nomini quì pure $\omega$ il massimo comun divisore tra $y$, $z$, e facciasi

$$(18) \qquad y = \omega y', \; z = \omega z'.$$

Sostituiti questi valori di A, B, e delle $x$, $y$ nell'equazione (V), sorgerà

$$x^2 - C = F\omega^2 ( My'^2 + Nz'^2 ),$$

dove M, N sono numeri primi fra loro, ed è ancora $y'$ primo a $z'$. Ora se poniamo

$$(19) \qquad My'^2 + Nz'^2 = \tau',$$

si avrà

$$(20) \qquad x^2 - C = F\omega^2\tau',$$

nella qnale equazione tosto vedesi, che debb' essere $\frac{x^2-C}{F}$ numero intero. Laonde col cognito metodo si trovino tutti i valori della $x$ (dato che n' esistano), i quali rendono $x^2-C$ divisibile esattamente per F. Di poi seguendo le traccie de' calcoli esposti per la risoluzione della (16) (§. 24), si determinino i valori che competono sì ad $\omega$ come a $\tau'$. Appresso chiamati questi ultimi $\pi'$, $\pi''$, $\pi'''$, ec., i quali come si è veduto nel §. 24 ponno essere positivi o negativi, si sostituiscano nella (19), e si otterranno le equazioni

$$(21) \quad \begin{cases} My'^2 + Nz'^2 = \pi', \; My'^2 + Nz'^2 = \pi'', \\ My'^2 + Nz'^2 = \pi''', \; . \; . \; . \; . \; . \; . \\ . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; , \end{cases}$$

che, come immediatamente si scorge, sono tutte della medesima forma. Perlocchè basterà mostrare come si trasformi la prima di esse in altra equazione pure di secondo grado, e la cui risoluzione si possa immediatamente dedurre da cognito metodo.

A tal effetto si trovi il massimo comun divisore tra M, $\pi'$, e chiamato G, facciasi $M = GM_1$, $\pi' = G\pi_1$. Collocati questi valori nella prima delle equazioni (21), e divisa per G, si otterrà

$$M_1 y'^2 + \frac{N}{G} z'^2 = \pm \pi_1,$$

ove si è messo il doppio segno a $\pi_1$, perchè, come si è detto, $\pi'$ può essere positivo ovvero negativo. Ma abbiamo già osservato che M, N sono numeri primi fra se, per conse-

gnente $z'$ dovrà essere divisibile esattamente per G. Pertanto si faccia

$$z' = Gz'', \tag{22}$$

e per più brevità posto $NG = N_I$, l'ultima equazione colla sostituzione di questi valori addiverrà

$$M_I y'^2 + N_I z''^2 = \pm \pi_I :$$

nella quale $y'$, $z''$ sono primi fra loro, altramente non lo sarebbero $y'$, $z'$: come pure $M_I$, $\pi_I$ essendo primi tra se, ne segue che $M_I$ è primo a qualsiasi fattore di $\pi_I$. Le quali condizioni ci conducono a conchiudere $z''$ primo a $\pi_I$: perciocchè se questo si negasse, le $y'$, $z''$ dovrebbero avere un massimo comun divisore; il che non è. Quindi si potranno sempre determinare per le due indeterminate $n$, $z'''$ de' valori in numeri interi, che verifichino l'equazione

$$y' = nz'' + \pi_I z''' : \tag{23}$$

il qual valore della $y'$ messo nell'ultima equazione ci darà

$$\left(\frac{M_I n^2 + N_I}{\pi_I}\right) z''^2 + 2M_I n z'' z''' + M_I \pi_I z'''^2 = \pm 1.$$

Ma poscia chè si è provato che $z''$, $\pi_I$ esprimono numeri primi fra loro, per conseguenza $\frac{M_I n^2 + N_I}{\pi_I}$ dovrà essere numero intero, la quale quantità possiamo altresì ridurre a maggiore semplicità.

Infatti, siccome $M_I$, $\pi_I$ sono numeri primi tra loro, così sarà sempre possibile trovare due numeri $\lambda$, $v$, che soddisfacciano all'equazione $M_I \lambda - \pi_I v = 1$. Ora moltiplicando per $\lambda$ l'espressione $\frac{M_I n^2 + N_I}{\pi_I}$, e mettendo $\pi_I v + 1$ alla vece di $M_I \lambda$, la formula precedente si convertirà nell'altra

$\lambda n^2 + \frac{n^2 + N_I v}{\pi_I}$. Il qual risultamento ci manifesta, che la questione

di cercare dei numeri interi $n$, che rendano $\frac{M_1 n^2 + N_1}{\pi_1}$ numero intero, si riduce a trovare medesimamente dei numeri interi per $n$, che dieno $n^2 + N_I v$ divisibile esattamente per $\pi_I$, i quali presi sì positivamente come negativamente sono contenuti fra o, e $+ \frac{1}{2}\pi_I$.

Posto adunque ch' esistano dei valori interi di $n$, che sostituiti nella divisione $\frac{M_1 n^2 + N_1}{\pi_1}$ dieno un quoto esatto, che nomineremo H, ed inoltre fatto $2M_I n = K$, $M_I \pi_I = L$, l'ultima equazione diventerà

$$Hz''^2 + Kz''z''' + Lz'''^2 = \pm 1 ; \qquad (24)$$

alla quale potremo applicare il metodo di Lagrange (*), tanto per iscoprire se sia solubile, quanto, nel caso del sì, per determinare i valori delle $z''$, $z'''$. Egli è pure facile comprendere, che tante saranno le equazioni (24) che dovremo risolvere, quanti sono i numeri interi $n$ che soddisfanno alla condizione di rendere $\frac{M_1 n^2 + N_1}{\pi_1}$ numero intero.

Risolute pertanto le equazioni (24), e trovati così i valori delle $z''$, $z'''$; le equazioni (23), (22) ci daranno quelli di $y'$, $z'$: ed essendosi pure ottenuti colla soluzione della (20) i valori delle $x$, $\omega$; mediante le equazioni (18) si avranno subito i valori delle $y$, $z$; ed in tal modo resterà sciolta l' equazione (V)

§. 27. Illustriamo la soluzione esposta nel §. antecedente proponendoci di risolvere in numeri interi l' equazione

$$x^2 = 65y^2 - 182z^2 - 69.$$

Abbiamo $A = 65$, $B = -182$, $C = -69$; onde ne viene $F = 13$, $M = 5$, $N = -14$; e le equazioni (19), (20) diventano

(*) Mem. de Berlin. an. 1768.

$$5y'^2 - 14z'^2 = \tau'$$
$$x^2 + 69 = 13\omega^2\tau'.$$

Ora fra i numeri che rendono $\frac{x^2+69}{13}$ numero intero, havvi $x = 3$; perciò risulta $\omega = 1$, $\tau' = \pi' = 6$. Divenendo adunque la prima delle equazioni (21)

$$5y'^2 - 14z''^2 = 6;$$

sorge $G = 1$, $M_1 = 5$, $\pi_1 = 6$; cosicchè avendosi dalla (22)

$$z' = z'',$$

si conchiude che la $z'$ è identica alla $z''$. Altronde l' equazione (23) risulta

$$y' = nz'' + 6z'''.$$

Trovato poi che il valore $n = 2$, ci dà $\frac{5n^2-14}{6} = 1$, ne viene $H = 1$, $K = 20$, $L = 30$; e quindi l' equazione (24) diventa

$$z''^2 + 20z''z''' + 30z'''^2 = 1.$$

Per isciogliere poi questa equazione si faccia

$$z'' = u - 10z''',$$

e messovi questo valore si convertirà nell' altra

$$u^2 - 70z'''^2 = 1,$$

la quale ammette una infinità di soluzioni (*), ed una se ne ha, come tosto si vede, facendo $u = 1$, $z''' = 0$. Per il che ricavasi $z' = 1$, $y' = 2$; e quindi risulta $x = 3$, $y = 2$, $z = 1$. Altre soluzioni si avranno della data equazione, trovando altri valori delle $u$, $z'''$.

§. 28. Ora non troveremo alcuna difficoltà nel risolvere in numeri interi l' equazione

$$\text{(VI)} \qquad x^2 = Ay^2 + Bz^2 + C,$$

A, B, C essendo numeri interi dati qualsivogliano. Poichè apertamente si scorge, che la soluzione di questa equazione è tutta riposta in ciò che abbiamo detto ne' §. 23 e 26.

---

(*) Legendre Op. cit. (32).

§. 29. Per ultimo, si osservi l'equazione $(\pi)$ ottenuta dalla trasformazione della (H) (§. 1), e si vedrà ch'è della medesima forma della (VI); cosicchè si potrà risolvere in numeri interi col metodo mostrato nel § antecedente. Da quì poi, e dalle condizioni che abbiamo dichiarate nel §. 2, si ha la risoluzione in numeri interi dell'equazione generale completa di secondo grado a tre indeterminate.

# ANALISI GEOMETRICA

## Dell' Ariete Idraulico

# MEMORIA

DEL SIG. PROFESSOR GIUSEPPE VENTUROLI

*Ricevuta adì* 20 *Aprile* 1820.

## ARTICOLO I.

### *Nozioni Preliminari.*

1. Dappoichè l' insigne geometra Cav. Brunacci con dotta e laboriosa opera ha ricercato le leggi del movimento dell' acqua nell' Ariete Idraulico, parer potrebbe soverchia la cura che altri ponesse nel ritrattare lo stesso problema. Pure io son d' avviso che de' belli ed importanti problemi come questo è, giovi il cercar diverse soluzioni, o sia partendo da diversi principj, o camminando con differente progresso. Se le soluzioni tornan conformi, si prestan esse a vicenda lume ed appoggio; se per avventura discordano, facilmente avviene che l' esame comparativo de' loro principj, o il confronto de' risultamenti loro colle sperienze ne guidi a rettificar quella delle due che si ritrovi in difetto. Altronde le mie ricerche mireranno più dappresso a quello scopo che più giova alla pratica, che è lo scoprire qual sia il maggiore effetto che ottener si possa dall' Ariete, e il regolarne le misure nel modo il più vantaggioso.

2. Questa macchina è oggimai così nota che io stimo superfluo darne quì la descrizione e il disegno. Ricorderò solamente i nomi che si suol dare alle sue parti principali. Da un ampio ed inesausto *Recipiente* sgorga l' acqua per un lungo tubo per lo più orizzontale, che dicesi il *Condotto*. Allo sbocco di questo tubo havvi una valvola rivolta verso

l' indentro, la quale sospinta dalla corrente si serra: questa chiamasi *Valvola d' arresto*, o *di fermata*, perchè al suo chiudersi tutta la corrente del condotto all' improvviso s' arresta. Allora lo sforzo laterale dell' acqua schiude un' altra valvola che volge all' infuori ed è situata nella parete superiore del condotto. Questa dicesi *Valvola di salita*, e per essa l' acqua salendo s' introduce in una sovrapposta *Campana* piena in parte d' acqua, nel resto d' aria. La nuova acqua introdotta comprime l' aria inchiusa nella campana; ma ben tosto chiudendosi la valvola di salita, l' aria compressa pel suo naturale elaterio si dilata e caccia fuori l' acqua soverchia per un lungo tubo che sporge dalla campana, e si solleva ad un' altezza ben grande. A questo tubo daremo il nome di *Cannello*. Ora e' si sa che mentre l' acqua su pel cannello s' invia, la valvola di fermata posta a basso si riapre da per se stessa, l' acqua ripiglia corso pel condotto e la richiude onde nuov' acqua è sospinta prima nella campana, e poscia nel cannello, e così senza interrompimento, e senza fine continua il periodo dell' Ariete.

3. Noi prenderemo a considerare il movimento dell' acqua, da prima mentre essa decorre per il condotto, poi quando s' intrude nella campana, in fine quando sale per il cannello. Ma prima d' ogni altra cosa ci gioverà richiamare un Problema idraulico che è il fondamento di tutti gli altri che avrem d' uopo di sciogliere, e questo è il problema dell' efflusso dell' acqua per un lungo tubo. Noi ne recheremo la soluzione Euleriana perfettamente conforme a quelle che con diversi metodi ne diedero Daniele Bernulli, d' Alembert, la Grange; se non che ci bisognerà introdurre, il che Eulero non fece, la resistenza che le pareti del tubo oppongono all' acqua corrente.

4. *Problema I.* Determinare l' efflusso dell'acqua da un vaso verticale per un lungo tubo inclinato.

Da prima considereremo il moto dell' acqua per entro il vaso E per ciò dal punto A (Veggasi la figura) ove termi-

nano le sezioni del vaso e cominciano quelle del tubo prenderemo le ascisse X dirette verticalmente all' insù. All' ascissa AP = X corrisponda la sezione orizzontale MM = Y. Consideriamo lo strato elementare M*m* chiuso tra le due sezioni vicinissime MM, *mm*. Sia *u* la velocità colla quale questo strato discende dopo il tempo *t*, e sia *p* la pressione esercitata dall' acqua contro la sezione MM, onde sarà $p + dp$ la pressione contro la sezion superiore *mm* Ciò posto egli è palese che la forza che sollecita lo strato M*m* a discendere, sarà (chiamando *g* la gravità) $gY dX + gY dp$; onde avremo $gY dX + gY dp = Y dX \frac{du}{dt}$. E perchè $u = -\frac{dX}{dt}$, sarà

$$g dp = -g dX - u du.$$

Sia *n* l' ampiezza del lume *ff* onde l' acqua vien fuori, e sia *c* la velocità dell' efflusso. Poichè le velocità sono reciproche alle ampiezze delle sezioni, sarà $u = \frac{nc}{Y}$; onde $u du = \frac{n^2 c dc}{Y^2} - \frac{n^2 c^2 dY}{Y^3}$. E perchè $\frac{nc}{Y} = -\frac{dX}{dt}$, sarà ancora $u du = -\frac{ndc}{dt}\frac{dX}{Y} - \frac{n^2 c^2 dY}{Y^3}$. Sostituendo questo valore nell' equazione, e poscia integrando avremo

$$(\alpha) \qquad p = \text{Cost.} - X + \frac{ndc}{gdt}\int \frac{dX}{Y} - \frac{n^2 c^2}{2gY^2}$$

Ci conviene ora determinar la costante. Dicasi H la pressione che aggrava la superficie dell'acqua del vaso, o la sezione suprema EE, l'ampiezza della qual sezione sia = S. Dicasi parimente I la pressione sulla sezione infima del vaso *ee* l'ampiezza della qual sezione sia = *s*. Dicasi finalmente l' altezza AR dell' acqua nel vaso = A. È manifesto che quando X = A, ed Y = S, sarà $p = H$; e dove X = o, ed Y = *s*, sarà $p = I$. Onde se col simbolo $\Sigma$ si denoti l' integrale definito $\int$ preso per l' intero tratto del vaso, avremo dall' equazione ($\alpha$) queste due

$$H = \text{Cost.} - A + \frac{ndc}{gdt}\,\Sigma\,\frac{dX}{Y} - \frac{n^2 c^2}{2g}\,\frac{1}{S^2}$$

$$I = \text{Cost.} - \frac{n^2 c^2}{2g}\,\frac{1}{s^2}$$

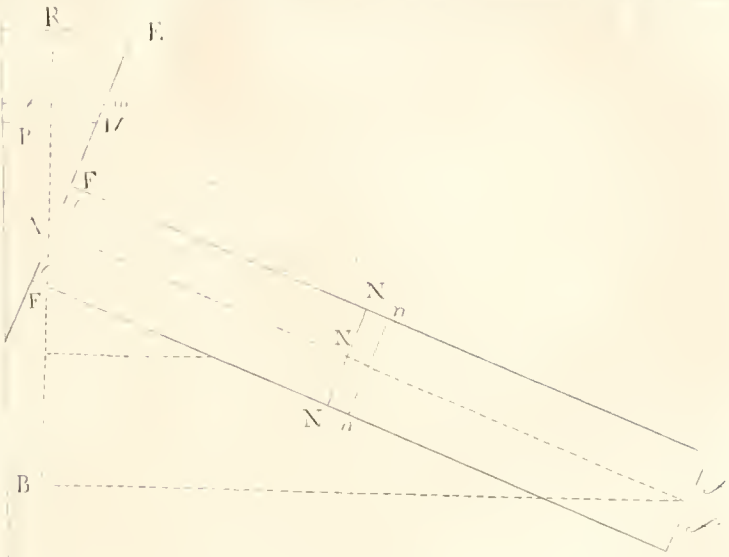
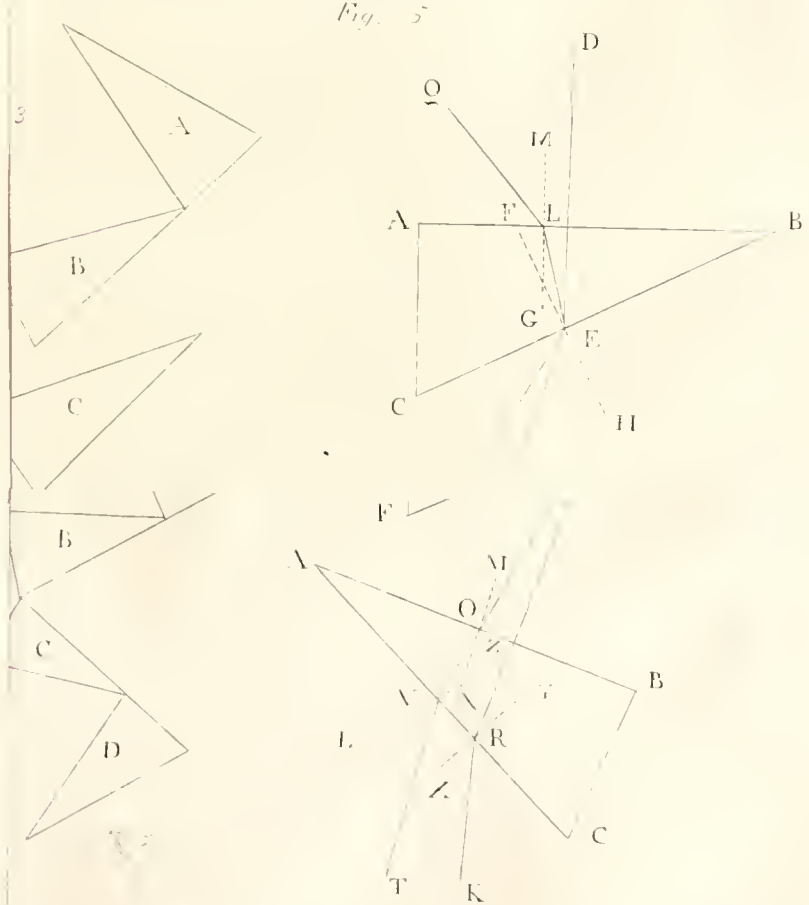
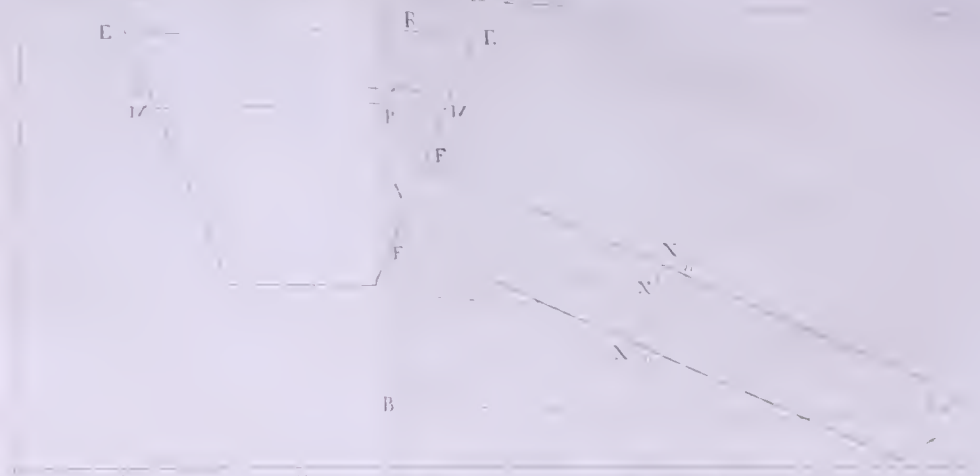


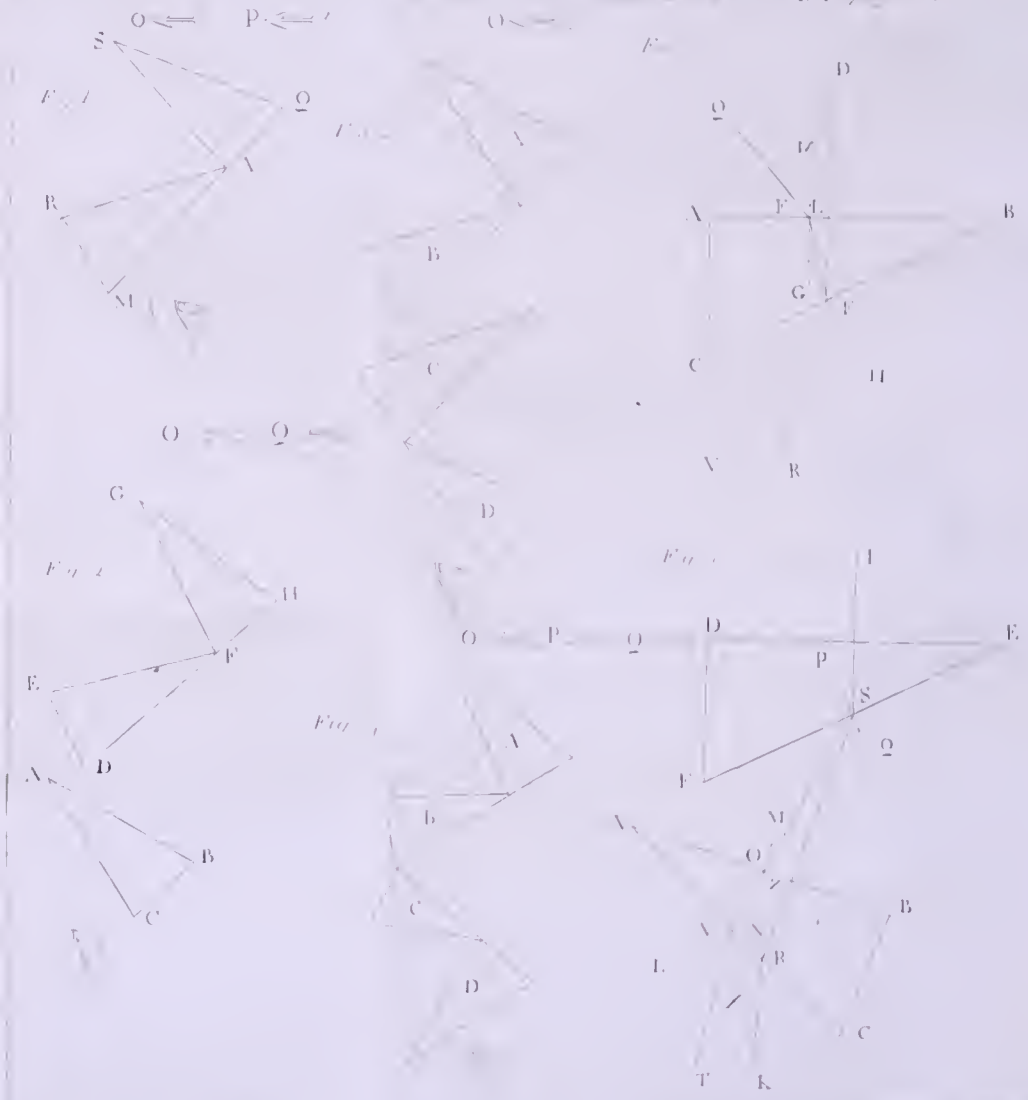



Fig. 5









onde

$$(a) \qquad H - I = - A + \frac{ndc}{gdt} \Sigma \frac{dX}{Y} + \frac{n^2 c^2}{2g} \left( \frac{1}{s^2} - \frac{1}{S^2} \right).$$

Ora passiamo a determinare nella stessa guisa il moto dell' acqua per entro il tubo. Consideriamo lo strato N*n* compreso tra due sezioni vicinissime NN, *nn*; sia *u* la velocità di questo strato dopo il tempo *t*, e sia *p* la pressione sulla sezione NN, $p + dp$ la pressione sulla sezione anteriore *nn*. Dicasi la lunghezza $AN = \lambda$, e l' ascissa verticale $AQ = x$ appartenente alla sezione NN, e sia l' ampiezza di questa sezione $= y$. La forza che sollecita lo strato N*n* sarà $gydx - gydp$; ma questa trova contrasto dalla resistenza delle pareti del tubo. Se questa forza ritardatrice si chiami gR, sarà $gRyd\lambda$ la forza motrice che dovrà levarsi da quella che abbiamo detta pocanzi. Sarà dunque $gydx - gydp - gRyd\lambda = yd\lambda \frac{du}{dt}$; o sia per essere $u = \frac{d\lambda}{dt}$, sarà

$$gdp = gdx - gRd\lambda - udu.$$

E perchè abbiamo come sopra $u = \frac{nc}{y}$, ed $udu = \frac{ndc}{dt} \frac{d\lambda}{y} - \frac{n^2 c^2 dy}{y^3}$, sostituendo questo valore, e poscia integrando, ritroveremo

$$(\beta) \qquad p = \text{Cost.} + x - \int Rd\lambda - \frac{ndc}{gdt} \int \frac{d\lambda}{y} - \frac{n^2 c^2}{2g} \frac{1}{y^2}.$$

Alla determinazione della costante si procede come dianzi. Abbiamo già chiamata I la pressione che ha luogo nella sezione *ee*, o sia nella prima sezione FF del tubo, l' ampiezza della qual sezione FF faremo $= m$. Dicasi K la pressione che ha luogo nella sezione ultima o sia nella luce *ff*, l' ampiezza della qual luce abbiamo già chiamata $= n$. Dicasi finalmente l' altezza verticale del tubo $AB = B$. È manifesto che dove $x = o$ ed $y = m$, sarà $p = I$; e dove $x = B$, ed $y = n$, sarà $p = K$. Onde ricaveremo dall' equazione ($\beta$) queste due

$$I = \text{Cost.} - \frac{n^2 c^2}{2g} \cdot \frac{1}{m^2}$$

$$K = \text{Cost.} + B - \Sigma . R d\lambda - \frac{ndc}{gdt} \Sigma . \frac{d\lambda}{y} - \frac{c^2}{2g}$$

e quindi

$$(b) \quad I - K = -B + \Sigma . R d\lambda + \frac{ndc}{gdt} \Sigma . \frac{d\lambda}{y} + \frac{n^2 c^2}{2g} \left( \frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} \right).$$

Finalmente sommando le due equazioni $(a)$, $(b)$ avremo per la soluzione del proposto Problema l' equazione

$$(P) \quad H - K + A + B = \Sigma . R d\lambda + \frac{ndc}{gdt} \left( \Sigma . \frac{dX}{Y} + \Sigma . \frac{d\lambda}{y} \right) + \frac{n^2 c^2}{2g} \left( \frac{1}{s^2} - \frac{1}{S^2} + \frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} \right).$$

5. Se il vaso è prismatico o cilindrico, sarà $\Sigma . \frac{dX}{Y} = \frac{A}{S}$; e se il tubo esso pure è cilindrico, e la sua lunghezza $= l$, sarà $\Sigma . \frac{d\lambda}{y} = \frac{l}{m}$. Abbiamo ancora pei tubi cilindrici $R = \mu c^2 + \nu c$, essendo $\mu$ e $\nu$ due coefficienti costanti.

Avviene assai volte che l' ampiezza del vaso è grandissima in paragone di quella del tubo, e che l' altezza del vaso è per contrario piccolissima rispetto della lunghezza del tubo. Ed allora potrà sprezzarsi $\frac{A}{S}$ a fronte di $\frac{l}{m}$, e potrà trascurarsi la frazione $\frac{1}{S^2}$ in confronto delle altre alle quali va unita. E se l' origine del tubo sarà congiunta col vaso per via d' un imbuto conico che tolga la contrazion della vena, dovremo fare $s = m$.

In questi supposti che tutti si avverano nelle applicazioni che siam per fare, l' equazione (P) del Problema si riduce alla

$$(Q) \quad H - K + A + B = \mu l c^2 + \nu l c + \frac{nldc}{gmdt} + \frac{c^2}{2g}.$$

Se il tubo è orizzontale, faremo $B = 0$; se fosse acclive, faremmo B negativo. Ed in generale il quadrinomio H—K+A+B

rappresenta l' altezza verticale della prima sezione EE sopra l' ultima *ff*, con di più l' eccesso della pressione che aggrava la prima, sopra la pressione che aggrava l' ultima.

6. L' equazione (Q) ci darà a conoscere la velocità dell' efflusso, o sia il vaso inesausto, o vada per l' efflusso votandosi. Se il vaso è inesausto, A è costante, onde senza più integrando l' equazione (Q) ne avremo $c$ espresso per $t$.

7. Che se il vaso per l' efflusso si vota, dovremo avvertire che quant' acqua nel tempetto $dt$ scaturisce fuori del tubo, altrettanto spazio rimane voto alla sommità del vaso. Ma il volumetto dell' acqua uscita fuori del tubo nel tempetto $dt$ è $= ncdt$, e lo spazio che resta voto alla sommità del vaso è $= -\mathrm{S}d\mathrm{A}$. Avremo dunque $ncdt = -\mathrm{S}d\mathrm{A}$. Sostituendo il valore del $dt$ preso di quì nella equazione (Q) essa diviene

$$\mathrm{H} - \mathrm{K} + \mathrm{A} + \mathrm{B} = \mu lc^2 + \nu lc - \frac{n^2 lcdc}{gm\mathrm{S}d\mathrm{A}} + \frac{c^2}{2g}.$$

Integrando questa equazione, avremo $c$ espresso per A; ed appresso l' altra equazione $ncdt = -\mathrm{S}d\mathrm{A}$ ne darà $c$ espresso per $t$.

8. Ma queste cose meglio s'intenderanno colle applicazioni che ne faremo. Intanto non lascierò di aggiungere che se dal primo tubo l' acqua passasse in un secondo, e per la luce di questo si scaricasse, supposti i tubi cilindrici, si determinerebbe l' eflusso coll' equazione seguente, nella quale abbiamo segnato con lettere accentate le quantità che al secondo tubo appartengono

$$\mathrm{H} - \mathrm{K} + \mathrm{A} + \mathrm{B} + \mathrm{B}' = (\mu l + \mu' l')c^2 + (\nu l + \nu' l')c + \frac{n' dc}{gdt}\left(\frac{l}{m} + \frac{l'}{m'}\right) + \frac{n'^2 c^2}{2g}\left(\frac{1}{s^2} - \frac{1}{\mathrm{S}^2} + \frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} + \frac{1}{n'^2} - \frac{1}{m'^2}\right).$$

E l' equazione sarebbe compagna per un maggior numero di tubi.

## ARTICOLO II.

### *Movimento dell' acqua nel Condotto.*

9. *PROBLEMA II.* Stando aperta la valvola di fermata, determinare la velocità dell' eflusso.

Noi quì supporremo il condotto orizzontale, onde sarà $B = o$. Supporremo anche il recipiente mantenuto pieno ad una costante altezza $a$, onde faremo $A = a$. E perchè le sezioni estreme non soffron altra pressione fuorchè quella dell' atmosfera ad entrambe comune, sarà $H = K$, e il quadrinomio $H - K + A + B$ si riduce ad essere $= a$. Quindi l' equazione (Q) darà pel nostro problema

$$a = \mu l c^2 + v l c + \frac{n l d c}{g m d t} + \frac{c^2}{2g}.$$

Si ponga per brevità

$$\frac{m}{n} \cdot \frac{2g}{l} = \alpha\,;\ \frac{m}{n} \cdot gv = \beta\,;\ \frac{m}{n}\left(g\mu + \frac{1}{2l}\right) = \gamma.$$

L' equazione diventerà

$$dt = \frac{dc}{\alpha - \beta c - \gamma c^2}$$

e dovrà integrarsi in guisa che $t = o$ renda $c = o$. L' integrazione è facile a compiersi colle note regole, e se per maggior compendio scriveremo $\frac{\alpha}{\gamma} + \frac{\beta^2}{4\gamma^2} = h^2$, ne avremo

$$t = \frac{1}{2h\gamma} \mathrm{Log.} \frac{h - \frac{\beta}{2\gamma}}{h + \frac{\beta}{2\gamma}} \cdot \frac{h + \frac{\beta}{2\gamma} + c}{h - \frac{\beta}{2\gamma} - c}\,;\ \text{oppure}\ c = \frac{\alpha}{\gamma} \cdot \frac{e^{2h\gamma t} - 1}{\left(h + \frac{\beta}{2\gamma}\right) e^{2h\gamma t} + h - \frac{\beta}{2\gamma}}$$

e così a qualunque tempo conosceremo la ricercata velocità dell' efflusso.

10. Fatto $t = \infty$, viene $c = h - \frac{\beta}{2\gamma}$. Questo è dunque un limite al quale continuamente s accosta la velocità dell' efflusso, senza però arrivarvi giammai. Ben è vero che do-

po breve tempo essa vi si avvicina in modo che il divario è impercettibile. E però questa può aversi per la velocità massima e finale dell' acqua effluente.

11. All' incontro sin tanto che $t$ è piccolissimo, viene $c = \alpha t$. Il che si troverà svolgendo in serie gli esponenziali e trascurando le potenze di $t$. Lo stesso può derivarsi eziandio dall' equazione differenziale, riflettendo che allora anche $c$ sarà piccolissima, e i termini $\mu lc^2$, $vlc$, $\frac{c^2}{2g}$ potranno sprezzarsi in confronto di $a$, il che riduce l' equazione differenziale a questa, $dc = \alpha dt$.

Dunque la velocità dell' acqua nel condotto sul principio dell' efflusso sarà $= \frac{n}{m} . \alpha t$, ossia $= \frac{agt}{l}$. Da che si vede che il movimento iniziale della colonna d' acqua che riempie il condotto, è un moto equabilmente accelerato dalla forza costante $\frac{ag}{l}$.

12. *Problema III.* Determinare la dispersione dell' acqua per la valvola di fermata.

Sia D la quantità d' acqua che sgorga dal lume $n$ nel tempo $t$. Sarà $d\mathrm{D} = ncdt$, o sia (n.° 9).

$$d\mathrm{D} = \frac{ncdc}{a - \beta c - \gamma c^2}$$

e quest' equazione dovrà integrarsi così che $t = 0$ renda $\mathrm{D} = 0$.

Conservando le stesse abbreviature del problema antecedente, riuscirà

$$\mathrm{D} = \frac{n}{2\gamma}\mathrm{Log}.\frac{a}{a - \beta c - \gamma c^2} - \frac{n\beta}{4h\gamma^2}\mathrm{Log}.\frac{h - \frac{\beta}{2\gamma}}{h + \frac{\beta}{2\gamma}} \cdot \frac{h + \frac{\beta}{2\gamma} + c}{h - \frac{\beta}{2\gamma} - c}.$$

E poichè quest' ultimo Logaritmo si è trovato di sopra (n.° 9) $= 2h\gamma t$, sarà in altro modo

$$\mathrm{D} = \frac{n}{2\gamma}\mathrm{Log}.\frac{a}{a - \beta c - \gamma c^2} - \frac{n\beta t}{2\gamma}.$$

Che se vogliasi la dispersione D interamente espressa pel

tempo, converrà anche nel primo termine in luogo della velocità $c$ introdurre il suo valore ( n.° 9 ) espresso per $t$, ed avremo

$$D = \frac{n}{\gamma} \text{Log.} \frac{1}{2h} \left[ \left( h + \frac{\beta}{2\gamma} \right) e^{hyt} + \left( h - \frac{\beta}{2\gamma} \right) e^{-hyt} \right] - \frac{n\beta t}{2\gamma}$$

onde sapremo quant' acqua in un dato tempo si disperda.

## ARTICOLO III.

### *Passaggio dell' acqua dal Condotto nella Campana.*

13. *PROBLEMA IV.* Data la velocità dell' acqua nel condotto al momento del colpo, determinare la velocità colla quale l' acqua entrerà nella campana.

Muovasi una massa M d' acqua in un vaso cilindrico con volocità $v$; onde se quest' acqua ha sfogo per un pertugio, di cui sia l' area $\phi$, e sia $m$ la sezione del cilindro, sarà la velocità dell' efflusso $= \frac{mv}{\phi}$. Stando così le cose, ponghiamo che una massa $\Pi$ con velocità V venga d' improvviso a percuotere la massa corrente. È certo per le leggi dinamiche che questa massa prenderà per l' urto la velocità $\frac{\Pi V + Mv}{\Pi + M}$, e che la velocità dell' efflusso diventerà subitamente $\frac{m}{\phi} \cdot \frac{\Pi V + Mv}{\Pi + M}$.

Accade appunto una simil cosa entro il condotto dell' Ariete nel chiudersi la valvola di fermata. Sia in quel momento la velocità dell' efflusso $= c$, sia $\phi$ l' apertura della valvola di salita, e sia $\omega$ quella picciola porzione della lunghezza del condotto, che sottostà ad essa valvola. Egli è manifesto che nel momento del colpo una colonna d' acqua di massa $= ml$, correndo con velocità $= \frac{nc}{m}$ incontra una massa $= m\omega$, corrente anch' essa con pari velocità $= \frac{nc}{m}$. Se questa massa $m\omega$ potesse proseguire il suo cammino, non vi

sarebbe percossa; ma poichè trovasi d' improvviso arrestata, e non ha sfogo se non che per l' apertura $\varphi$, ella ne uscirà per le cose dette colla velocità $\frac{m}{\varphi} \cdot \frac{ml \cdot \frac{nc}{m} + m\omega \cdot \frac{nc}{m}}{ml+m\omega}$, vale a dire colla velocità $\frac{nc}{\varphi}$. Se dunque dicasi C la velocità colla quale l' acqua entrerà nella campana al momento del colpo, avremo $C = \frac{nc}{\varphi}$. Il che era da trovarsi.

14. Passiamo ora ad esplorare il moto dell' acqua che cominciando con questa celerità iniziale C, prosiegue ad influire nella campana. Si oppone all' influsso l' elasticità o sia la pressione dell' aria che nella campana si chiude. Il valor di questa pressione dipende dall' altezza dell' acqua che ivi ristagna. Se quest' altezza fosse precisamente a tal segno, che la pressione dell' aria rinchiusa equilibrasse la colonna d' acqua elevata nel cannello, detta $b$ l' altezza verticale d' esso cannello, la pressione dell' aria rinchiusa si esprimerebbe per $b$, ed il valore del quadrinomio $H - K + A + B$ (n.° 5) sarebbe $a - b$.

Ma se l' altezza dell' acqua nella campana sarà maggiore o minore dell' indicato segno, che da quì avanti chiamerò *segno d' equilibrio*, allora la pressione dell' aria rinchiusa sarà maggiore o minore di $b$. Pongasi l' altezza iniziale dell' acqua nella campana alquanto maggiore del segno d' equilibrio, e sia l' eccesso $= i$. Supponendo quest' altezza $i$ assai piccola, potremo assumere che l' incremento dell' elasticità dell' aria sia proporzionale ad $i$, e così esprimere l' elasticità dell' aria compressa per $b + ki$, essendo $k$ un coefficiente costante, che si determinerà dalla nota forma e grandezza della campana. Avremo allora il quadrinomio $H-K+A+B=a-b-ki$.

Così sarà nel principio dell' influsso. Ora dopo scorso il tempo $t$ sia entrata nella campana la quantità d' acqua $= q$, e sia N la sezione della campana verso il luogo dove arriva il livello dell' acqua; sarà $\frac{q}{N}$ l' alzamento del livello operato

nel tempo $t$, nel quale per conseguente l' altezza $i$ sarà divenuta $i+\frac{q}{N}$. Avremo dunque dopo il tempo $t$ il quadrinomio $H-K+A+B=a-b-ki-\frac{kq}{N}$. Ciò premesso, venghiamo al seguente

15. *Problema V.* Data la velocità iniziale dell' influsso, determinare la velocità dopo qualsivoglia tempo.

Essendo per le cose dette $H-K+A+B=a-b-ki-\frac{kq}{N}$, l' equazione (Q) applicata al nostro Problema, sarà

$$a-b-ki-\frac{kq}{N}=\mu lc^2+vlc+\frac{\phi ldc}{gmdt}+\frac{c^2}{2g}$$

o sia perchè $dq=\phi cdt$,

$$a-b-ki-\frac{kq}{N}=\mu lc^2+vlc+\frac{\phi^2 lcdc}{gmdq}+\frac{c^2}{2g}.$$

Questa dovrà integrarsi per modo che riesca $q=0$ quando $c=C$; e ne avremo il valore di $q$ espresso per $c$. Poscia l' altra equazione $dq=\phi cdt$ integrata così che $t=0$ renda $c=C$, ne darà la velocità dell' influsso a qualunque tempo.

16. Ma l' equazione del numero precedente non è integrabile in termini finiti, a cagion del termine $vlc$. Se non che d' ordinario l' altezza $b$ a cui si solleva l' acqua per mezzo dell' Ariete è così grande che a fronte di essa ponno sicuramente sprezzarsi i termini $\mu lc^2$, $vlc$, $\frac{c^2}{2g}$. Ed allora l' equazione ridotta alla

$$a-b-ki-\frac{kq}{N}=\frac{\phi^2 lcdc}{gmdq}$$

s' integra senza la menoma difficoltà, e somministra l' equazione finita

$$(b+ki-a)\,q+\frac{kq^2}{2N}=\frac{\phi^2}{m}\cdot\frac{C^2-c^2}{2g}.$$

Sarà più comodo se invece della velocità $c$ colla quale l' acqua trapassa la valvola di salita, mettasi la velocità $u$ colla quale l' acqua nello stesso tempo decorre per il con-

dotto; e così invece della velocità iniziale C del passaggio per la valvola, mettasi la velocità iniziale U dell' acqua nel condotto, vale a dire quella velocità che ha l' acqua nel condotto allorchè si serra la valvola d' arresto. Poichè le sezioni sono sempre reciproche alle velocità abbiamo $c = \frac{mu}{\varphi}$, e $C = \frac{mU}{\varphi}$, onde l' equazion precedente diventa

$$(b + ki - a)\,q + \frac{kq^2}{2N} = ml \cdot \frac{U^2 - u^2}{2g}.$$

17. Facendo $u = 0$, avremo l' intera quantità dell' acqua che s' introdurrà nella campana. La quale se dicasi Q, si determinerà per l' equazione quadratica

$$(b + ki - a)\,Q + \frac{kQ^2}{2N} = ml \cdot \frac{U^2}{2g}.$$

E perchè nel primo membro il secondo termine è sempre assai piccolo in riguardo al primo, potrà sempre tenersi per valor prossimo e poco maggiore del vero

$$Q = \frac{mlU^2}{2g(b + ki - a)}.$$

18. Se sarà $i = -\frac{Q}{2N}$, l' equazione quadratica darà precisamente

$$Q = \frac{mlU^2}{2g(b - a)}.$$

Adunque in questo caso la Q è quarta proporzionale dopo $b - a$, $\frac{U^2}{2g}$, ed $ml$; onde come sta l' altezza a cui vuol sollevarsi l' acqua sopra il livello del recipiente all' altezza dovuta alla velocità dell'acqua nel condotto al momento del colpo, così sta la quantità dell'acqua che riempie il condotto alla quantità dell' acqua che verrà per quel colpo sollevata.

19. Noi vedremo fra poco che questo valore di Q è il maggiore a cui possa ascender giammai la quantità dell' influsso. Ma egli è facile lo assicurarsene sin d' ora mercè il

principio della conservazione delle forze vive. Il prodotto della mole $ml$ che riempie il condotto per l'altezza $\frac{U^2}{2g}$ dovuta alla sua velocità, esprime la forza viva guadagnata dall'acqua nel suo discorso per il condotto. Il prodotto $Q(b-a)$ esprime la forza viva necessaria a sollevare la mole Q all'altezza verticale $b-a$. Dunque se tutta la forza viva dell'acqua del condotto s'adoperasse nel sollevare la mole Q, nè parte alcuna se ne distraesse o nel vincere le resistenze o in altro effetto straniero, dovrebbe essere per l'appunto

$$Q(b-a) = ml \cdot \frac{U^2}{2g}.$$

Ed appunto dalla conservazione delle forze vive ricavò il Sig. Mongolfier (*V. Journal de l'Ecole Polytech. Cah.* 14.) la proporzione del numero precedente, che egli stabilisce per regola onde trovare il massimo della quantità d'acqua che l'Ariete può sollevare in un colpo. Giusta, come vediamo, è la regola, e mostreremo a suo luogo in qual modo debbano disporsi le parti dell'Ariete, per avvicinarsi quanto più presso si può a questo limite.

20. *PROBLEMA VI.* Determinare il tempo dell'influsso.

Abbiamo l'equazione $dq = \varphi c dt$, ovvero in luogo della $c$ introducendo la $u$, $dq = mudt$. Questa, ponendovi per $u$ il suo valore tratto dall'equazione del n.° 16, diventa

$$dt = \frac{dq}{m\sqrt{\left[U^2 - \frac{2gq}{ml}(b + ki - a) - \frac{gkq^2}{Nml}\right]}}$$

e dovrà integrarsi in guisa che $t = 0$ dia $q = 0$.

Faccio per brevità i coefficienti costanti $\frac{2g}{ml}(b+ki-a) = \beta$, $\frac{gk}{Nml} = \gamma$, onde l'equazione ha la forma

$$dt = \frac{dq}{m\sqrt{(U^2 - \beta q - \gamma q^2)}}$$

e facendo per ulteriore compendio $\frac{U^2}{\gamma} + \frac{\beta^2}{4\gamma^2} = h^2$, l'integrale mi proviene

$$t = \frac{1}{m\sqrt{\gamma}}\left[\text{Arc. sin.}\frac{U}{h\sqrt{\gamma}} - \text{Arc. sin.}\frac{1}{h\sqrt{\gamma}}\sqrt{(U^2-\beta q-\gamma q^2)}\right].$$

E perchè (n.° 16) $\sqrt{(U^2-\beta q-\gamma q^2)} = u$, sarà finalmente

$$t = \frac{1}{m\sqrt{\gamma}}\left[\text{Arc. sin.}\frac{U}{h\sqrt{\gamma}} - \text{Arc. sin.}\frac{u}{h\sqrt{\gamma}}\right],$$

21. Facendo $u = 0$, avrò l' intera durata dell' influsso; la quale se io chiamerò T, avrò per conseguenza

$$T = \frac{1}{m\sqrt{\gamma}}\ \text{Arc. sin.}\frac{U}{h\sqrt{\gamma}}.$$

E poichè $\frac{U}{h\sqrt{\gamma}}$ è frazion picciolissima, e l' arco picciolissimo si confonde col seno, si può fare senza tema d' error sensibile $T = \frac{U}{mh\gamma}$. Rimettendo i valori di $h$ e di $\gamma$ viene $T = \frac{Ul}{g\sqrt{\left[(b+ki-a)^2+\frac{mlkU^2}{Ng}\right]}}$, dove il secondo termine sotto il radicale essendo assai piccolo a fronte del primo, può aversi per valor prossimo e poco maggiore del vero

$$T = \frac{Ul}{g(b+ki-a)}.$$

22. Nel caso speciale del quale abbiamo trattato nel n.° 18, vale a dire quando sia $i = -\frac{Q}{2N}$, essendo insieme (n.° 18) $Q = \frac{mlU^2}{2g(b-a)}$, il valore di T pocanzi trovato, trascurando le quantità picciolissime e disprezzabili, si riduce al seguente assai prossimo e semplicissimo

$$T = \frac{Ul}{g(b-a)}.$$

## ARTICOLO IV.

### *Del giuoco delle valvole.*

23. Per le formole sin quì raccolte noi potremmo agevolmente calcolare quant' acqua si disperda e quanta si sol-

levi per un dato Ariete, tutta volta che noi conoscessimo e il tempo $t$ che dura l'acqua scorrendo per la valvola di fermata, e l'altezza $i$ (n.° 14) che determina lo stato dell'aria della campana al momento del colpo. Come possa trovarsi quest'altezza $i$ lo vedremo altrove. Quanto al tempo $t$ esso sarà più lungo o più breve secondo il più o men gagliardo contrasto che la valvola di fermata oppone alla spinta della corrente. E ben si vede che potendo questa valvola essere in varie guise costrutta ed armata, la sua resistenza al chiudersi non potrebbe esprimersi con una formola generale.

Nell'Ariete descritto dal Sig. Hachette (*Traitè des machines*) il piano del foro è orizzontale, e la valvola è una palla che dal proprio peso è tenuta a piombo sotto esso foro ad una determinata distanza, poi dalla violenza del corso sollevata verticalmente va ad applicarsi contro la bocca del foro. Questa foggia di valvola sembra la più acconcia a lasciar libera la corrente nel condotto sino al punto della fermata. Noi dunque sopra di essa faremo il calcolo del tempo che mette a chiudersi; e questo calcolo potrà poi facilmente accomodarsi a qualunque valvola a cappa, che urtata dalla corrente del condotto trova contrasto a questo moto nel proprio peso.

24. *Problema VII.* Determinare il tempo che mette a chiudersi la valvola di fermata, o sia il tempo della dispersione.

Sia R il raggio della palla, $\delta$ la sua gravità specifica comparata a quella dell'acqua, $v$ la sua velocità. La forza impellente uguaglia il peso d'una colonna d'acqua di base $\frac{1}{2}\pi R^2$, e d'altezza $\frac{(u-v)^2}{2g}$; sarà dunque $= \frac{\pi R^2}{4g}(u-v)^2$. Contrasta con questa forza il peso della palla, che sott'acqua è $= \frac{4}{3}\pi R^3(\delta - 1)$. Quindi la forza motrice sarà $= \frac{\pi R^2}{4g}(u-v)^2 - \frac{4}{3}\pi R^3(\delta - 1)$. Dividendola per la massa del-

la palla, la qual è $= \frac{4\pi R^3\delta}{3g}$, avremo la forza acceleratrice, che posta $= \frac{dv}{dt}$ ci darà l' equazione

$$(u-v)^2\,dt - \tfrac{16}{3}\,gR\,(\delta-1)\,dt = \tfrac{16}{3}\,R\,\delta\,dv\,.$$

Quì dovrebbe porsi per $u$ il suo valore $\frac{nc}{m}$, ossia (n.° 9.) $\frac{na}{my}\,\frac{e^{2hyt}-1}{(h+\frac{6}{2y})\,e^{2hyt}+h-\frac{6}{2y}}$; ma perchè il tempo che sta aperta la valvola dipende assai più dal moto iniziale della medesima che non da quello che ha verso il fine, potremo facilitare il calcolo, prendendo (n.° 11) $u = \frac{agt}{l}$, e sarà da integrarsi l' equazione

$$\left(\frac{agt}{l}-v\right)^2 dt - \tfrac{16}{3}\,gR\,(\delta-1)\,dt = \tfrac{16}{3}\,gR\,\delta\,dv$$

in modo che $t=0$ renda $v=0$.

Se per brevità scrivesi $\frac{16}{3}\,gR\,(\delta-1) + \frac{16}{3}\,\frac{agR\delta}{l} = M^2$, l' integrale ci riuscirà

$$v = \frac{agt}{l} - M\,\frac{e^{\frac{3Mt}{8R\delta}}-1}{e^{\frac{3Mt}{8R\delta}}+1}$$

che mostrerà la velocità della valvola ad ogni istante.

Sia $x$ lo spazio corso dalla valvola; sarà $dx=vdt$, dove ponendo per $v$ il valore testè ritrovato, ed integrando così che $t=0$ dia $x=0$, ci verrà l' integrale

$$x = \frac{agt^2}{2l} - Mt - \tfrac{16}{3}\,R\delta\,\text{Log.}\,\frac{1+e^{-\frac{3Mt}{8R\delta}}}{2}$$

che mostrerà lo spazio corso dalla valvola nel tempo $t$.

Adunque se chiameremo G l' intero spazio che trapassa-

la valvola nel serrarsi, o sia come suol dirsi il suo *gioco*, l'equazione

$$G = \frac{agt^2}{2l} - Mt - \frac{16}{3} R\delta \text{ Log. } \frac{1 + e^{-\frac{3Mt}{8R\delta}}}{2}$$

determinerà il tempo $t$ della dispersione.

25. Questa è la soluzione analitica del Problema; la quale però non potrà fedelmente rappresentarci il moto della valvola a meno che la valvola così si muova per entro l'acqua del condotto, come farebbe in un fluido indefinito. Ed a questo fine fa d'uopo che la canna del condotto colà dove gioca la valvola abbia una sezione più larga dell'ordinaria, tal che il gioco della valvola non dia notabile impaccio alla corrente. Ed appunto nella più parte degli Arieti trovasi praticata quest'avvertenza.

26. Dopo aver visto quanto dura la valvola a chiudersi, sarà bene il vedere quanto duri a riaprirsi. Si riapre la valvola discendendo pel proprio peso per l'altezza G. In uno spazio sì corto qual è quello di questa discesa, la resistenza del mezzo non può fare alcun sensibil ritardo. E però il tempo che dura la valvola a riaprirsi è quello stesso che si richiede alla palla onde cader liberamente sott'acqua per lo spazio G. E questo tempo trovasi per le note leggi della caduta de' gravi $= \sqrt{\frac{2G\delta}{g(\delta - 1)}}$.

27. *Problema VIII.* Determinare il tempo nel quale sta aperta la valvola di salita.

Questo tempo si compone di due, l'uno della salita della valvola, l'altro della discesa. La salita essendo brevissima e cominciando con velocità assai grande, la sua durata può aversi per impercettibile. Alla discesa è sollecitata la valvola dal proprio peso, e la resistenza del mezzo non può ritardarla sensibilmente. Sia dunque G' l'alzata, o il gioco di questa valvola, $\delta'$ il suo peso specifico. Sarà il cercato tempo $= \sqrt{\frac{2G'\delta'}{g(\delta' - 1)}}$.

28. Si potrebbe credere che la discesa della valvola oltre la resistenza del mezzo dovesse soffrire contrasto dall'impressione dell'acqua, che colla velocità $c$ va entrando nella campana. Ma questo contrasto non può avvenire se non è per accidente, o per viziosa costruzione della macchina. Quando l'imboccatura del foro di salita segue l'andamento della vena contratta, la velocità $c$ non ha luogo se non nella sezione di esso foro. Al di sopra del foro l'acqua si spande nell'ampio corpo della campana; ivi perde presso che tutto il suo moto, nè può colla sua velocità trattenere la caduta della valvola.

Nell' Ariete descritto da M. Hachette anche la valvola di salita è una palla sostenuta da una briglia che limita il segno sino al quale essa può alzarsi. E questa forma è comodissima, perchè appena scostata la valvola lascia libero all'acqua il passaggio.

## ARTICOLO V.

### *Riflusso dell' acqua nel condotto.*

29. Se l'animella di salita si chiudesse precisamente in quel punto nel quale termina l'influsso dell'acqua nella campana, egli è palese che appena chiusa la valvola, l'acqua del condotto resterebbe senza moto, ed appoggiandosi al dorso della valvola di fermata, vi farebbe contro una pressione rappresentata dall'altezza $a$ del recipiente. Quindi impossibil sarebbe che questa valvola si riaprisse da se medesima. Imperocchè se la valvola dee riaprirsi da se, bisogna che la forza che la riapre sia quella stessa che contrastando contro l'impulso della corrente si opponeva al suo chiudimento. Ora se questa forza ha ceduto all'impulso della corrente, bisogna necessariamente dire che ella fosse minore di quest'impulso, e però minore del peso d'una colonna d'acqua dell'altezza dovuta alla velocità della corrente. Ma quest'altez-

za è sempre minore di $a$. Dunque la forza che riapre la valvola non potrà mai vincere una pressione rappresentata dall' altezza $a$.

30. Di quì possiamo argomentare essere assolutamente necessario per lo spontaneo gioco dell' Ariete, che la valvola di salita rimanga per qualche tempo aperta dopo cessato l'influsso. E così essendo il tempo dell' influsso T, e il tempo in cui sta aperta la valvola di salita essendo ( n.° 27 ) $\sqrt{\frac{2G'\delta'}{g(\delta'-1)}}$ dovrà essere $\sqrt{\frac{2G'\delta'}{g(\delta'-1)}} > T$. Ed allora pel tempo $\theta = \sqrt{\frac{2G'\delta'}{g(\delta'-1)}} - T$ l' acqua della campana refluirà nel condotto per l'aperta valvola, e trovando chiusa l' animella di fermata, ricorrerà verso la sorgente.

Questo moto retrogrado che incomincia mentre la valvola di salita è tuttora aperta, non cessa già in istanti al chiudersi di quella, ma dura ancor tanto tempo quanto si richiede perchè la velocità conceputa rimanga estinta dal contrasto che vi oppone la pressione del recipiente. In queste due differenti epoche il riflusso dell' acqua si fa con diverse leggi, e nei due seguenti Problemi additeremo le equazioni che le determinano.

31. *Problema IX.* Determinare il moto refluo dell' acqua nel condotto, mentre la valvola di salita è tuttora aperta.

Dicasi $r$ l' alzamento che l' influsso ha prodotto nel livello dell' acqua entro la campana. L' elasticità dell' aria compressa dopo l' influsso si esprime ( n.° 14 ) per l' altezza $b + ki + kr$. Spinta da questa pressione l' acqua s' incammina retrograda pel condotto vincendo la pressione dell' acqua del recipiente rappresentata dall' altezza $a$. Sarà dunque il quadrinomio $H - K + A + B = b + ki + kr - a$, e chiamando $c$ la velocità dell' acqua nel condotto dopo il tempo $t$ l' equazione (Q) diverrà pel nostro Problema

$$b + ki + kr - a = \mu lc^2 + vlc + \frac{ldc}{gdt} + \frac{c^2}{2g} \cdot \frac{m^2}{\phi^2}$$

Questa dovrebbe integrarsi per modo che $t=0$ rendesse $c=0$; ed essendo in tutto simile all'equazione del Problema II. il valore di $c$ espresso in $t$ sarebbe della stessa forma ritrovata nel n.° 9. colla sola diversità de' coefficienti.

Ma senza integrare quest'equazione, se osserveremo che la durata di questo riflusso è brevissima, troveremo come al n.° 11, che il moto retrogrado della colonna può aversi per un moto uniformemente accelerato dalla forza costante $\frac{g}{l}(b+ki+kr-a)$. E però nel momento in cui la valvola di salita si chiude, la velocità dell'acqua retrograda nel condotto si troverà essere $=g\frac{\theta}{l}(b+ki+kr-a)$.

32. *Problema X.* Determinare il moto refluo dell'acqua nel condotto, dopo chiusa la valvola di salita.

Chiusa la valvola, e tolta la comunicazione colla colonna ascendente, il quadrinomio $H-K+A+B$ si riduce tosto ad essere $=-a$. E l'equazione determinatrice del moto diventa

$$-a=\mu lc^2+vlc+\frac{ldc}{gdt}+\frac{c^2}{2g}.$$

E questa dovrebbe integrarsi in guisa che $t=0$ desse $c=g\frac{\theta}{l}(b+ki+kr-a)$.

Ma noi potremo fuggir la fatica di questa integrazione considerando che per la picciolezza di $c$ i termini moltiplicati per $c$ potranno sprezzarsi, e ridursi l'equazione a questa $-a=\frac{ldc}{gdt}$; onde segue che dopo chiusa la valvola di salita, il moto retrogrado della colonna può aversi per un moto equabilmente ritardato, essendo la forza ritardatrice $\frac{ag}{l}$, e la velocità iniziale $g\frac{\theta}{l}(b+ki+kr-a)$. Dicasi $\Theta$ la durata di questo riflusso. Sarà dunque

$$\Theta = \theta . \frac{b+ki+kr-a}{a} .$$

33. Egli è appunto in quest' intervallo di tempo, che si fa luogo al riaprirsi della valvola di fermata. Certamente questa valvola non può riaprirsi mentre sta aperta la valvola di salita; poichè allora l' acqua s' appoggia con molta forza al dorso della valvola di fermata, e vi esercita contro una pressione rappresentata dall' altezza della colonna ascendente. Ma tosto che rimane interrotta la comunicazione colla colonna ascendente, questa pressione cessa di subito, e l' acqua del condotto, che allora corre retrograda, non può far forza contro la valvola.

34. Le cose sin quì dimostrate ci danno omai un assai chiara idea delle oscillazioni ond' è agitata la colonna d' acqua che riempie il condotto dell'Ariete. Essa da prima incomincia a portarsi verso lo sbocco ed il suo moto sul principio è uniformemente accelerato dalla forza $\frac{ag}{l}$, ma nel progresso l' accelerazione si diminuisce e il moto tende verso l' uniformità. Chiusa la valvola d' arresto, il moto della colonna si fa ritardato, e il ritardo è sempre maggiore, poichè la forza ritardatrice va crescendo, mentre l'acqua introdotta nella campana ne va comprimendo l' aria rinchiusa.

Al moto diretto della colonna succede immediatamente il moto retrogrado della medesima verso la sorgente. Pel tempo $\theta$ nel quale rimane tuttavia aperta la valvola di salita, questo moto può aversi per equabilmente accelerato dalla forza $\frac{g}{l}(b+ki+kr-a)$; poi pel tempo $\Theta$ dopo chiusa quella valvola, diviene presso a poco uniformemente ritardato dalla forza $\frac{ag}{l}$.

35. Si osservi ancora come il tempo nel quale sta aperta la valvola di salita, si compone di due; l' uno è il tempo T dell' influsso, l' altro è il tempo $\theta$ nel quale prende origine ed accrescimento il moto refluo dell' acqua nel con-

dotto. Noi abbiamo determinato il valore di T nel n.° 21, e quello di $\theta$ nel n.° 31.

Similmente il tempo nel quale sta aperta la valvola di fermata, di due intervalli è composto; l'uno è il tempo $\Theta$ nel quale declina e si spegne il moto retrogrado, l'altro è il tempo $t$ nel quale ricomincia il moto diretto e l'acqua per la valvola si disperde. Il tempo $\Theta$ si determina prossimamente per l'equazione del n.° 32, ed il tempo $t$ per quella del n.° 24.

Di questi quattro tempi si compone la durata intera del colpo $= t + T + \theta + \Theta$.

## ARTICOLO VI.

### *Salita dell'acqua per il cannello.*

36. Quello che avviene nel condotto dell'Ariete dopo terminato l'influsso dell'acqua nella campana, lo abbiam dichiarato nell'Articolo precedente: vediamo ora quel che avvenga nella campana stessa e nel cannello. E già è manifesto che l'acqua della campana cacciata dalla pressione della sovrastante aria discenderà, ed inalzerà la colonna che riempie il tubo montante. Dicasi, come prima $r$ l'alzamento che l'influsso produsse nel livello dell'acqua entro la campana; e dopo il tempo $t$ siasi abbassato questo livello per l'altezza $z$. Conservando le denominazioni già stabilite l'elasticità dell'aria compressa sarà nel principio $= b + k(i+r)$; e dopo il tempo $t$ sarà $= b + k(i+r-z)$. E così considerando l'efflusso che si fa dalla campana per la bocca superiore del cannello, sarà per quest'efflusso il quadrinomio $H - K + A + B = k(i+r-z)$. Ciò premesso, prendiamo a sciogliere il seguente.

37. *Problema XI.* Determinare la velocità dell'acqua che ascende per il cannello.

Sia $\lambda$ la lunghezza del cannello, $f$ la sua sezione o ampiezza che noi supporremo uniforme, N la sezione della cam-

pana intorno al sito dove arriva il livello dell'acqua; e siano $\mu'$, $\nu'$ i coefficienti della resistenza d'attrito appropriati all'ampiezza del cannello. Essendo (n.° 36) H—K+A+B= $k(i+r-z)$, l'equazione (Q) diverrà pel nostro Problema

$$k(i+r-z)=\mu'\lambda c^2+\nu'\lambda c+\frac{\lambda dc}{gdt}+\frac{c^2}{2g}.$$

Quì, poichè $z$ è variabile, dovremo seguire la traccia indicata al n.° 7 eliminando $dt$ mediante l'equazione $Ndz=fcdt$; giacchè l'acqua calata nella campana, che è $=Ndz$ dev'essere tanta quanta è l'acqua uscita nel tempetto $dt$ per la bocca del cannello, che è $=fcdt$. Così diventerà l'equazione

$$k(i+r-z)=\mu'\lambda c^2+\nu'\lambda c+\frac{f\lambda cdc}{gNdz}+\frac{c^2}{2g}.$$

Trascuriamo per ora la resistenza dell'attrito; vedremo ben tosto come essa ha pochissima parte nella determinazione del moto. Adunque messi via i termini moltiplicati per $\mu'$ e per $\nu'$, e fatto $\frac{c^2}{2g}=s$, cosicchè esprima $s$ l'altezza dovuta alla velocità dell'acqua che sale pel cannello avremo l'equazione

$$ds+\frac{N}{f\lambda}sdz-\frac{kN}{f\lambda}(i+r-z)dz=0$$

la quale moltiplicata per $e^{\frac{Nz}{f\lambda}}$, ed integrata in guisa che $z=0$ dia $s=0$, ci dà

$$\frac{s}{k}=i+r-z+\frac{f\lambda}{N}-\left(i+r+\frac{f\lambda}{N}\right)e^{-\frac{Nz}{f\lambda}}.$$

Dalla quale equazione impariamo come vada crescendo la velocità a misura che il livello dell'acqua nella campana si va abbassando.

38. Nelle comuni misure dell'Ariete idraulico $\frac{Nz}{f\lambda}$ è sempre una frazione assai piccola. Avvertita questa circostanza, l'equazione pocanzi trovata si riduce semplicissima, giacchè

potremo fare $e^{-\frac{Nz}{f\lambda}} = 1 - \frac{Nz}{f\lambda} + \frac{N^2z^2}{2f^2\lambda^2}$, e così avremo

$$s = \frac{kN}{f\lambda}\left[ (i+r)\,z - (i+r)\,\frac{Nz^2}{2f\lambda} - \frac{z^2}{2} \right].$$

Quì pure potremo trascurare il secondo termine in confronto degli altri due; onde avremo per ultimo

$$s = \frac{kN}{2f\lambda}\left[ (i+r)\,2z - z^2 \right].$$

39. Facendo $\frac{ds}{dz} = 0$, troveremo che la velocità è massima, quando è $z = i + r$, vale a dire quando l'acqua nella campana è discesa sino al segno dell'equilibrio. È questa velocità massima dovuta all'altezza $\frac{kN}{2f\lambda}(i+r)^2$. E perchè l'altezza $i + r$ è picciolissima a fronte di $\lambda$, ben si vede che il moto dell'acqua per il cannello sarà assai lento, onde poco scapito potrà ricevere dagli attriti. E per questo, come dicevamo pocanzi, possiamo in questo Problema prescindere dal tener conto delle resistenze.

Discesa poi l'acqua nella campana per lo spazio $i + r$, ed ivi presa la massima velocità, segue tuttavia discendendo per altrettanto spazio; giacchè non torna la velocità a divenire zero, se non quando è $z = 2(i + r)$.

40. Per determinare il tempo della discesa ripiglieremo l'equazione $Ndz = fcdt$; ove mettendo per $c$ il suo valore $\sqrt{2gs}$, e per $s$ il suo valore (n.° 38), avremo

$$dt = \sqrt{\frac{\lambda N}{fgk}} \times \frac{dz}{\sqrt{[(i+r)\,2z - z^2]}}.$$

Integrando per modo che $t = 0$ dia $z = 0$, verrà

$$t = \sqrt{\frac{\lambda N}{fgk}} \times \text{Arc. cos.}\left(1 - \frac{z}{i+r}\right).$$

41. Facendo $z = i + r$, avremo $t = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{\lambda N}{fgk}}$, e questo sarà il tempo nel quale l'acqua della campana discende sino al segno dell'equilibrio, e resta espulso dalla campana quel

soprappiù d' acqua, che toglieva l' equilibrio tra l' aria interna e la colonna ascendente. Facendo poi $z=2(i+r)$, avremo $t=\pi\sqrt{\frac{\lambda N}{fgk}}$, intera durata dell' efflusso.

Ed è notabile come questi tempi punto non dipendono nè dalla quantità dell' influsso, nè dall' iniziale altezza dell' acqua nella campana; aumentandosi in proporzione della maggior quantità d' acqua introdotta la compressione dell' aria e l' attività di questa a sospingere l' acqua su pel cannello.

42. Facciamoci ora a paragonare la quantità dell' acqua che entrò nella campana durante l' influsso, con quella che di mano in mano ne va sortendo. La quantità dell' acqua introdotta è $=Nr$. Quella che n' esce nel tempo $t$, raccogliesi dalla nostra formola (n.° 40) $=N(i+r)\left(1-\text{Cos.}\, t\sqrt{\frac{fgk}{\lambda N}}\right)$. Tutta quella poi che può uscirne è $=2N(i+r)$, e il tempo che si richiede ad espellerla è $=\pi\sqrt{\frac{\lambda N}{fgk}}$.

Ora affinchè il giuoco dell' Ariete sia permanente, gli è assolutamente necessario che quant' acqua s' introdusse nell' influsso, altrettanta ne venga cacciata in quel tempo che passa tra il finire dell' influsso e il cominciare dell' influsso seguente. Quest' intervallo di tempo è quello stesso durante il quale sta aperta la valvola di fermata, e però giusta le nostre denominazioni è $=t+\Theta$ (n.° 35.).

Adunque se sarà $t+\Theta<\pi\sqrt{\frac{\lambda N}{fgk}}$ cosicchè l' influsso si rinnovi prima che l' acqua della campana sia discesa alla maggiore bassezza, dovrà essere

$$Nr=N(i+r)\left(1-\text{Cos.}\, t\sqrt{\frac{fgk}{\lambda N}}\right) \text{ onde}$$

$$t+\Theta=\sqrt{\frac{\lambda N}{fgk}}\times\text{Arc. Cos.}\,\frac{i}{i+r}.$$

Ma se sarà $t+\Theta>\pi\sqrt{\frac{\lambda N}{fgk}}$, cosicchè l' acqua della

campana abbia tempo di scendere sino alla maggiore bassezza, allora dovrà essere

$$Nr = 2N(i + r)$$

onde $i = -\frac{1}{2}r$, ossia $i = -\frac{Q}{2N}$. Pertanto in quest' ipotesi avrà luogo quel caso speciale del quale abbiamo distintamente parlato nei n.$^i$ 18. e 22., mostrando come in tal caso la quantità e la durata dell' influsso si esprimono con queste due semplicissime formole

$$Q = \frac{mlU^2}{2g(b-a)} \qquad T = \frac{lU}{g(b-a)}.$$

43. E quì ci si palesa ancora come ed in qual senso sia vero quello che allora affermammo (n. 19), cioè che il sopraddetto valore di Q esprime la maggior quantità d' acqua che l' Ariete possa sollevare in un colpo.

Infatti è chiaro pel n.° 14. che tanto maggiore sarà Q, quanto sarà minore $i$. Ora il più picciolo valore che possa darsi all' $i$ è appunto questo $i = -\frac{1}{2}r$. Poichè se si desse all' $i$ un valor negativo più grande di $\frac{1}{2}r$, sarebbe $2N(i+r) < Nr$. Dunque l' acqua espulsa sarebbe meno della introdotta (n.° 42) e non sarebbe permanente il lavoro dell' Ariete. Ora quando $i = -\frac{1}{2}r$, ne viene appunto (n.° 18) $Q = \frac{mlU^2}{2g(b-a)}$. Questo adunque è il massimo valore di Q per l' Ariete ridotto a stabil periodo. Che se per qualche artifizio si rendesse $i$ minore dell' indicato limite, si avrebbe invero pel primo colpo un influsso Q maggiore dell' anzidetto, ma nel secondo colpo comincierebbe a scemare, ed in breve sarebbe ridotto al limite pocanzi disegnato.

## ARTICOLO VII.

### *Portata dell' Ariete idraulico.*

44. *PROBLEMA XII.* Date le misure dell' Ariete, e l' altezza costante del serbatojo che lo alimenta, ritrovare quanto durerà ciascun colpo, quant' acqua sarà innalzata, e quanta dispersa.

Sono quantità incognite da determinarsi queste otto: 1.° il tempo $t$ e 2.° la quantità D della dispersione, 3.° la velocità U che ha l' acqua nel condotto quando si chiude la valvola di fermata, 4.° l' altezza $i$ che determina lo stato dell' aria nella campana al principio dell' influsso, 5.° la quantità Q e 6.° la durata T dell' influsso, 7.° il tempo $\theta$ che corre tra il termine dell' influsso e il chindersi della valvola di salita, 8.° finalmente il tempo $\Theta$ che corre tra il chiudersi della valvola di salita e il principio della dispersione.

Non metto per incognito l' alzamento $r$ essendo palesemente $r = \frac{Q}{N}$. Neppur metto per incognita la durata intera del colpo, essendo questa $= t + T + \theta + \Theta$.

Ora per determinare le otto incognite abbiamo per l'appunto queste otto equazioni

$$(I) \qquad G = \frac{agt^2}{2l} - Mt - \frac{16R\delta}{3} \text{Log.} \frac{1 + e^{-\frac{3Mt}{8R\delta}}}{2} \qquad (\text{n.° } 24)$$

e giova avvertire che per lo più il fattore $\frac{3M}{8R\delta}$ riuscirà così grande da potersi con sicurezza trascurare l' esponenziale a fronte dell' unità; ed allora quest' equazione riducesi alla più semplice

$$G = \frac{agt^2}{2l} - Mt + \frac{16R\delta}{3} \text{Log. } 2$$

$$\text{(II)}\quad D=\frac{n}{\gamma}\,\text{Log.}\,\frac{(h+\frac{\delta}{2\gamma})e^{h\gamma t}+(h-\frac{\delta}{2\gamma})e^{-h\gamma t}}{2h}-\frac{n\delta t}{2\gamma}\ \text{(n.° 12.)};$$

i termini moltiplicati per $\beta$ sono d' ordinario così piccoli a fronte de' loro compagni, che per l' uso pratico nulla nuoce l' ometterli, e fare

$$D=\frac{n}{\gamma}\,\text{Log.}\,\frac{e^{h\gamma t}+e^{-h\gamma t}}{2}$$

$$\text{(III)}\quad U=\frac{n\alpha}{m\gamma}\cdot\frac{e^{2h\gamma t}-1}{(h+\frac{\delta}{2\gamma})e^{2h\gamma t}+h-\frac{\delta}{2\gamma}}\qquad\text{(n.° 9.)}$$

ossia più semplicemente, giusta l' osservazione fatta pocanzi

$$U=\frac{nh}{m}\cdot\frac{e^{2h\gamma t}-1}{e^{2h\gamma t}+1}$$

$$\text{(IV)}\quad Q=\frac{mlU^2}{2g(b+ki-a)}\qquad\text{(n.° 17.)}$$

$$\text{(V)}\quad T=\frac{lU}{g(b+ki-a)}\qquad\text{(n.° 21.)}$$

$$\text{(VI)}\quad \theta=\sqrt{\frac{2G^2\delta'}{g(\delta'-1)}}-T\qquad\text{(n.° 30.)}$$

$$\text{(VII)}\quad \Theta=\theta\cdot\frac{b+ki+kr-a}{a}\qquad\text{(n.° 32.)}$$

$$\text{(VIII)}\quad t+\Theta=\sqrt{\frac{\lambda N}{fgk}}\times\text{Arc.cos.}\,\frac{i}{i+r}\ \text{(n.° 42.)}.$$

Abbiamo adunque altrettante equazioni in termini finiti, quante sono le incognite; e non è punto difficile il determinar queste, ajutandosi all' uopo colle false posizioni.

45. Circa l' ottava equazione è da avvertire che secondo le cose dette di sopra (n.° 42) l' Arc. cos. $\frac{i}{i+r}$ non può in quest' equazione ricevere altro valore se non quello compreso fra o e $\pi$; onde qualora riuscisse $t+\Theta>\pi\sqrt{\frac{\lambda N}{fgk}}$, invece di quest' equazione (VIII) dovremmo porre quest' altra

$i = -\frac{1}{2}r$; ed insieme le equazioni (IV) e (V) si cambiano in queste più semplici (n.° 18. e 22.) $Q = \frac{mlU^2}{2g(b-a)}$, $T = \frac{lU}{g(b-a)}$.

46. Se il serbatojo dell' Ariete non fosse in realtà inesausto, siccome lo abbiamo sino ad ora immaginato, ma fosse alimentato da una sorgente della quale si conoscesse la portata, avremmo una condizione di più, necessaria a verificarsi affinchè tal sorgente possa mantenere il serbatojo ad un costante livello. Per esprimere questa condizione, dicasi $\Delta$ la portata della sorgente, o sia la quantità d' acqua che in 1" ella versa nel serbatojo, e sarà $\Delta(t+T+\theta+\Theta)$ la quantità che ella vi versa durante un colpo dell' Ariete. Ma nel tempo d' un colpo l' Ariete tra l' acqua elevata e la dispersa consuma una quantità d' acqua $= Q + D$. Convien dunque che sia $Q + D$ non maggiore di $\Delta(t+T+\theta+\Theta)$; altrimenti la sorgente non basterà al consumo e l' acqua andrà mancando nel serbatojo. E però i valori dedotti dalle otto equazioni del n.° 44. dovranno di più soddisfare a questa nona condizione

$$Q + D < \Delta(t + T + \theta + \Theta).$$

## ARTICOLO VIII.

*Della più vantaggiosa disposizione dell' Ariete.*

47. Dalle nostre formole si raccolgono assai facilmente alcune utili regole per la soluzione di questo Problema: Data l' altezza costante dell' acqua nel serbatojo, e la portata della sorgente che lo mantiene, data la lunghezza e il diametro del condotto, le aperture delle valvole, e finalmente l' altezza a cui vuol sollevarsi l' acqua; regolare il gioco delle valvole stesse, e determinar le misure della campana e del cannello in guisa che si ottenga dall'Ariete la portata massima.

48. *Regola I.* Per avere la portata massima si ricerca

che quando si chiude la valvola di fermata, la velocità dell' eflusso sia prossimamente i quattro quinti della velocità massima (n.° 10.) che può concepire l' acqua effluente.

Dim. Poichè l' Ariete nel tempo d' un colpo, vale a dire nel tempo $t + T + \theta + \Theta$ solleva la quantità d' acqua Q, egli è chiaro che la sua portata, cioè la quantità d' acqua sollevata in 1'' sarà $\frac{Q}{t+T+\theta+\Theta}$. Ma il numeratore Q è prossimamente $= \frac{mlU^2}{2g(b+ki-a)}$ (n.° 17.), e il denominatore può ristringersi a $t$, giacchè gli altri intervalli di tempo ponno ridursi brevissimi rispetto al tempo della dispersione. Trattasi adunque di render massima la formola $\frac{mlU^2}{2gt(b+ki-a)}$. Abbiamo dall' equazione (III) (n.° 44.) prossimamente $U = \frac{nh}{m} \cdot \frac{e^{2h\gamma t} - 1}{e^{2h\gamma t} + 1}$. Posto questo valore nella formola precedente, e tralasciato il coefficiente costante, resterà la funzione $\frac{(e^{2h\gamma t} - 1)^2}{t(e^{2h\gamma t} + 1)^2}$ da rendersi massima. Faccio $e^{2h\gamma t} = z$, ed uguaglio a zero il differenziale della formola $\frac{1}{\log . z} \left( \frac{z-1}{z+1} \right)^2$; ne viene l' equazion trascendente $z^2 = 4z \log . z + 1$, alla quale soddisfa $z = 8,8226$. Dunque sarà $e^{2h\gamma t} = 8,8226$, ed $U = \frac{nh}{m} \cdot \frac{7,8226}{9,8226}$, ossia prossimamente $U = \frac{4}{5} \cdot \frac{nh}{m}$. Tale essendo la velocità dell' acqua nel condotto, quella dell' efflusso per la valvola $n$ sarà per conseguente $= \frac{4}{5} h$, onde ec.

49. Adunque il tempo della dispersione si avrà dall' equazione $e^{2h\gamma t} = 8,8226$. che dà $t = \frac{2,177}{2h\gamma}$.

La quantità poi della dispersione si calcola per via dell' equazione (II), nella quale ponendo per $e^{hyt}$ il suo valore $\sqrt{8,8226}$, la dispersione riesce prossimamente $= \frac{n}{2\gamma}$.

50. Ora dovrà regolarsi la valvola di fermata a modo che la dispersione duri per appunto quel tempo $t$ che abbiamo pocanzi determinato. Per lo che si porrà questo valore di $t$ nell' equazione (I); nella quale rimanendo indeterminata la G che esprime il gioco della valvola, il suo raggio R, e la sua gravità specifica $\delta$, basterà combinare questi elementi in maniera che l' equazione ne resti verificata. Ed allora il valore di $t$ e quello di U riusciranno tali, quali alla portata massima si richieggono.

Quì si noti come nell' equazione (I) non ha luogo nè l' altezza $b$, nè la lunghezza $\lambda$ del cannello. Quindi acconcia una volta a dovere la valvola di fermata, essa servirà ugualmente bene a qualunque altezza voglia l' acqua sollevarsi.

51. *Regola II.* Per avere la portata massima ricercasi in secondo luogo che sia $i = -\frac{1}{2} r$. Vale a dire che nel momento in cui s' apre la valvola di salita, l' acqua nella campana si trovi tanto al di sotto del segno d' equilibrio ( n.° 14. ) quanto si rialza per l' influsso al di sopra di esso segno.

Dim. Per accrescere quanto si può l' influsso Q conviene ( n.°43. ) diminuire al possibile l' altezza $i$. Ma il minimo valore dell' $i$ è per appunto $-\frac{1}{2} r$. Dunque ec.

52. Ci assicureremo dell' adempimento di questa Regola se determineremo le misure della campana e del cannello in guisa che $\pi \sqrt{\frac{\lambda N}{fgk}}$ riesca minore del valore di $t$ trovato di sopra (n.°49.). Poichè allora sarà tanto più $t+\Theta > \pi \sqrt{\frac{\lambda N}{fgk}}$, e saremo sicuri ( n.° 45. ) che nell' intervallo tra due consecutivi influssi l' acqua della campana ha tempo di compiere

la sua intera discesa, e farsi $i = -\frac{1}{2}r$.

53. Adempiuta che sia questa regola, avremo (n.° 45.)

$$Q = \frac{mlU^3}{2g(b-a)}, \qquad T = \frac{lU}{g(b-a)}$$

e poichè (n.° 48.) $U = \frac{4}{5} \cdot \frac{hn}{m}$, riuscirà

$$Q = \frac{16}{25} \cdot \frac{n^2lh^3}{2gm(b-a)}, \qquad T = \frac{4}{5} \cdot \frac{nlh}{gm(b-a)}.$$

54. *Regola III.* Finalmente per la portata massima si richiede che sia $\Theta = \sqrt{\frac{2G\delta}{g(\delta-1)}}$. Vale a dire che dopo chiusa la valvola di salita, il riflusso dell'acqua nel condotto continui per tanto tempo, nè più nè meno, quanto ci vuole a riaprirsi la valvola di fermata.

Infatti se il riflusso finisse prima che la valvola di fermata avesse potuto riaprirsi, egli è chiaro che l'acqua del condotto ripigliando corso verso la valvola, le impedirebbe il riaprirsi. E se per lo contrario il riflusso durasse più che non dura il riaprirsi della valvola, quel soprappiù sarebbe in pura perdita, e allungherebbe il tempo del colpo senza aumentare la quantità dell'influsso; onde la portata riceverebbe discapito.

55. Si ottiene questa condizione col regolare acconciamente la valvola di salita. Abbiamo dalle equazioni (VI) e (VII)

$$\Theta = \frac{b+ki+kr-a}{a}\left(\sqrt{\frac{2G'\delta'}{g(\delta'-1)}} - T\right).$$

Porremo dunque questo valore $= \sqrt{\frac{2G\delta}{g(\delta-1)}}$, e nè verra l'equazione

$$\sqrt{\frac{2G'\delta'}{g(\delta'-1)}} = T + \frac{a}{b+ki+kr-a}\sqrt{\frac{2G\delta}{g(\delta-1)}}.$$

Tutti gli elementi che costituiscono il secondo membro sono già determinati dalle due Regole precedenti. Rimanendo pertanto indeterminato il gioco G', ed il peso specifico $\delta'$ della

valvola di salita, basterà combinare questi due elementi in modo che ne resti avverata l'equazione.

Abbiamo di sopra ritrovato ( n.° 50. ) che la valvola di fermata conveniente a un dato Ariete si rimane la stessa, a qualunque altezza vogliasi l'acqua innalzare. Non è già lo stesso della valvola di salita. Quanto più alto dovrà l'acqua salire, tanto più picciola dovrà riuscire $\sqrt{\frac{2G'\delta'}{g(\delta'-1)}}$, e però tanto maggior peso e tanto minore respiro converrà darsi alla valvola.

56. Sodisfatto che siasi a questa terza regola, egli è per le nostre formole manifesto che si avrà

$$T+\theta+\Theta=\sqrt{\frac{2G\delta}{g(\delta-1)}}+\sqrt{\frac{2G'\delta'}{g(\delta'-1)}}.$$

57. *Regola IV.* Il limite della portata che può aversi dall'Ariete è da questa formola espresso

$$0,2756\,nh.\frac{a}{b-a}.$$

Infatti la portata $\frac{Q}{t+T+\theta+\Theta}$, ove si pongano i valori di Q, di $t$, e di $T+\theta+\Theta$ che abbiamo ritrovati ( n.$^i$ 49, 53, 56.) convenire alla portata massima, diviene

$$\frac{\frac{16}{25}\,\frac{n^2lh^2}{2gm(b-a)}}{\frac{2,177}{2h\gamma}+\sqrt{\frac{2G\delta}{g(\delta-1)}}+\sqrt{\frac{2G'\delta'}{g(\delta'-1)}}}.$$

Ora se nel denominatore si tralasciano i due radicali, la somma de' quali nel caso nostro è picciolissima a fronte del primo termine, avremo per l'appunto, fatte le riduzioni, la formola $0,2756\,nh.\frac{a}{b-a}$, che sarà alquanto maggiore della reale portata, e ne rappresenterà il limite.

58. Essendo nel caso della portata massima ( n.° 53. ) $Q=\frac{16}{25}\cdot\frac{n^2lh^2}{2gm(b-a)}$, e ( n.°49.) $D=\frac{n}{2\gamma}$, fatte le riduzioni si troverà.

$$Q : D :: \tfrac{16}{25} a : b - a .$$

E tal sarà la proporzione dell' acqua elevata alla dispersa, nel caso della portata massima.

59. Vagliono le regole sin quì prescritte quando il serbatojo dell' Ariete sia inesauribile, o indefinita sia la portata della sorgente che lo mantiene. Ma questa portata $\Delta$ potrebbe essere così scarsa, che non bastasse a fornire tant' acqua quanta può smaltirne l'Ariete nel caso della portata massima. Il che si conoscerà, quando fosse per riuscirne $Q+D>\Delta(t+T+\theta+\Theta)$ contro l' osservanza indicata al n.° 46. In tal caso sarà d' uopo limitare a più breve tempo la dispersione, nè potrà aspettarsi, che l' acqua del condotto arrivi ai quattro quinti della velocità massima. Ed ecco in qual modo parmi che si possa determinare il limite di questa velocità.

Poichè dev' essere tutt' al più $Q+D=\Delta(t+T+\theta+\Theta)$, e poichè la portata dell' Ariete risulta tanto maggiore quanto più s' abbreviano i tempi $\theta$, $\Theta$ del riflusso, si avrebbe la portata massima se potesse farsi $\theta$ ond' anche $\Theta=0$, e quindi $Q+D=\Delta(t+T)$. Adunque potrà quest' equazione servirci a determinare il limite di $t$, e per conseguenza di U.

Ma se in luogo di Q, D e T vi mettiamo i loro valori espressi per $t$ ne uscirà un' equazion trascendente assai complicata. Per agevolare la ricerca di quel valore di $t$ che le soddisfa, gioverà esprimere in serie date per U le quantità $t$, Q, D, T. E già quando si faccia giusta la seconda Regola $i=-\frac{1}{2}r$, abbiamo $Q=\frac{mlU^2}{2g(b-a)}$, $T=\frac{lU}{g(b-a)}$. Le quantità $t$ e D ponno anch' esse facilmente esprimersi con serie convergenti date per U, buttando in serie i loro valori dati agli articoli 9. e 12, ed in luogo di $c$ ponendovi $\frac{mU}{n}$. Se ci fermiamo ne' primi termini di queste serie avremo $D=\frac{mlU^2}{2ga}$, $t=\frac{lU}{ga}$. E surrogati questi valori, l'equazione del limite da-

rà $U = \frac{2\Delta}{m}$. Quando dunque codesto limite $U = \frac{2\Delta}{m}$ riesce minore dell' altro ( n.° 48.) $U = \frac{4}{5} \cdot \frac{nh}{m}$, egli è al primo che noi dovremo attenerci. E quindi parmi di poter dedurre la seguente.

60. *Regola V.* Se sarà $\Delta < \frac{2}{5} nh$, il limite a cui dovrà fermarsi la velocità dell' acqua del condotto al momento del colpo, sarà prossimamente dato dalla formola $U = \frac{2\Delta}{m}$.

61. Di quì si conoscerà il tempo della dispersione, mediante la formola $t = \frac{1}{2h\gamma} \text{Log.} \frac{h + \frac{mU}{n}}{h - \frac{mU}{n}}$. Converrà poi prendere $t$ alcun poco maggiore di questo limite, affinchè gl' intervalli $\theta$ e $\Theta$ del riflusso riescano maggiori di zero, com' è necessario ( n.° 30 .) perchè possa riaprirsi la valvola di fermata, e continuarsi lo spontaneo gioco dell' Ariete. Determinato il tempo $t$, regoleremo la valvola di fermata nel modo già insegnato al n.° 50.

Per quel che appartiene alla seconda Regola, quì pure dovrà procurarsi $i = -\frac{1}{2} r$; il che si otterrà come sopra ( n.° 52.) coll' assegnare alla campana od al cannello le misure a ciò convenienti.

Finalmente per ciò che riguarda la valvola di salita, abbiamo nel caso presente l' equazione

$$Q + D = \Delta ( t + T + \theta + \Theta )$$

nella quale porremo i valori di $\theta$ e di $\Theta$ che dalle equazioni (VI) e (VII) si raccolgono, e separeremo il radicale $\sqrt{\frac{2G'\delta'}{g(\delta'-1)}}$, che inchiude il gioco G' e il peso specifico $\delta'$ della valvola. Si dovranno adunque combinare questi elementi in modo, che il sopraddetto radicale ottenga il valore per quest' equazione determinato.

# DIMOSTRAZIONE

DI ALCUNE FORMOLE GENERALI DELLA LETTERA DOMENICALE
PER QUALUNQUE ANNO INNANZI, O DOPO LA
RIFORMA DEL CALENDARIO GREGORIANO

# MEMORIA

DEL SIGNOR

GIUSEPPE CALANDRELLI ASTRONOMO

*Ricevuta adì* 25. *Agosto* 1820.

1. Nel primo anno dell'Era cristiana fu la lettera domenicale B. Nel 1582 anno della riforma del Calendario era la lettera domenicale G, e siccome il dì 5. Ottobre per la correzione medesima si disse 15, ed al medesimo giorno 5. nella distribuzione delle lettere fatta per tutti i giorni dell'anno gli corrisponde la lettera E, quindi il giorno 5. era venerdì, ed il giorno 7 domenica. Essendosi dunque detto il giorno 5. giorno 15, il giorno 15. a cui compete A divenne venerdì ed il giorno 17. a cui compete C divenne domenica.

2. Si distribuiscano le lettere domenicali secondo il loro ordine, e queste indicate siano dalli numeri superiori, ch' esprimono il loro luogo diretto.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1, | 2, | 3, | 4, | 5, | 6, | 7 |
| A, | B, | C, | D, | E, | F, | G, |
| 2·, | 1·, | 7·, | 6·, | 5·, | 4·, | 3· |

Essendo le lettere ordinate col loro ordine diritto dal primo di Gennajo colla lettera A, e così ripetute di sette in sette

in tutti i consecutivi giorni dell' anno comune, composto di giorni 365, è quindi evidente, che l' ultimo dì del primo anno, ossia il 31. Dicembre ha la medesima lettera A. Qualunque anno dunque comune se incomincia in qualunque feria delle sette, termina nella medesima feria, ed il veniente anno incomincia colla feria susseguente. Da ciò deriva, che le lettere domenicali, le quali sono notate col ordine naturale, e diretto in tutti li giorni, prendono un ordine retrogrado di anno in anno. Se dunque, non considerando che gli anni comuni nel primo anno fu la lettera domenicale B, nel secondo fu A, nel terzo G, nel quarto F, nel quinto E, nel sesto D, e nel settimo C. Ricominciò quindi il periodo secondo settenario retrogrado, ed a questo fine si sono notati i numeri puntati $1^{\cdot}$, $2^{\cdot}$, $3^{\cdot}$, $4^{\cdot}$, $5^{\cdot}$, $6^{\cdot}$, $7^{\cdot}$ ; sarebbero perciò le retrogradazioni che nell'Era cristiana incominciano da B tante, quanti sono gli anni comuni che si numerarono nell' Era medesima. Ma ogni quarto anno essendo bisesto, l'aggiunta di un giorno, che si fa nel mese di Febbrajo dà una retrogradazione nella lettera domenicale, poichè al giorno che si aggiugne, non corrisponde alcuna lettera. Così nel quarto anno per la retrogradazione successiva la lettera domenicale F, dopo l'aggiunto giorno 29. Febbrajo retrogradò e divenne E.

3. È evidente dunque, che le retrogradazioni nelle lettere domenicali sono tante quanti sono gli anni, e quanti sono i bisesti decorsi i quali sono tanti quanto è il quoto che nasce dividendo il numero degli anni per 4. Così per esempio nell' anno 1818. il numero de' bisestili sarà il quoto che risulta dividendo $\frac{1818}{4}$, e che può rappresentarsi, come usa il Sig. Cav. Delambre per $\left(\frac{1818}{4}\right)_i$ ; intendendo con questa espressione il numero intero o quoto, non avendo riguardo al residuo.

4. Dalla proposta serie di lettere si rileva che allorchè

le semplici retrogradazioni dopo un numero qualunque di settenarj completi sono zero, questo necessariamente cade nel numero settenario completo $7^{\cdot}$. Similmente si conosce, che il numero retrogrado $1^{\cdot}$ viene dopo il settenario completo $7^{\cdot}$, ed il $2^{\cdot}$ similmente viene dopo lo stesso numero retrogrado settenario $7^{\cdot}$. Quando dunque le residuali retrogradazioni siano $0^{\cdot}$, $1^{\cdot}$, $2^{\cdot}$; possono considerarsi come $7^{\cdot}+0^{\cdot}$, $7^{\cdot}+1$, $7^{\cdot}+2^{\cdot}$. Al contrario i numeri retrogradi $3^{\cdot}$, $4^{\cdot}$, $5^{\cdot}$, $6^{\cdot}$ precedendo il prossimo settenario $7^{\cdot}$ dovranno considerarsi come sono. Posto ciò se a qualunque numero retrogrado si aggiunga il numero corrispondente nella serie diretta delle lettere domenicali s'otterrà sempre un numero costante 10, essendo evidentemente nella proposta serie $3^{\cdot}+7$, $4^{\cdot}+6$, $5^{\cdot}+5$, $6^{\cdot}+4$, $7^{\cdot}+0+3$, $7^{\cdot}+1^{\cdot}+2$, $7^{\cdot}+2^{\cdot}+1=10$. Questo numero costante varia, variando la disposizione delli numeri retrogradi, ed essendo sette le lettere domenicali, sette diversi numeri costanti possono ottenersi e questi sono 14, 13, 12, 11, 10, 9, 8. Così se i numeri retrogradi fossero disposti nel modo seguente

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1, | 2, | 3, | 4, | 5, | 6, | 7. |
| A, | B, | C, | D, | E, | F, | G. |
| $7^{\cdot}$, | $6^{\cdot}$, | $5^{\cdot}$, | $4^{\cdot}$, | $3^{\cdot}$, | $2^{\cdot}$, | $1^{\cdot}$ |

il numero costante diviene 8.

5. Premesse queste cose, si proponga la primiera disposizione delli numeri retrogradi, come fu nel primo anno dell'Era cristiana. Si chiami H il numero degli anni trascorsi, i quali si considerino primieramente tutti comuni, e sarà $\left(\frac{H}{7}\right)_i$ il numero intero delli settenarj retrogradi. Sarà similmente $\left(\frac{H}{7}\right)_r$, ossia il residuo della divisione, che rappresenterà le retrogradazioni trascorse dall'ultimo settenario compito. Quando dunque la lettera domenicale corrispondente si chiami L, sarà (4) $\left(\frac{H}{7}\right)_r+L=10$, ed $L=10-\left(\frac{H}{7}\right)_r$. Si con-

siderino ora i bisesti trascorsi, e sarà $\left(\frac{H}{4}\right)_i$ il numero esprimente i già passati bisesti, alli quali, come si è rilevato (2), altrettante retrogadazioni corrispondono nelle lettere domenicali. Il numero dunque intero delle retrogradazioni sarà $H + \left(\frac{H}{4}\right)_i$; ed $\left(\frac{H+\left(\frac{H}{4}\right)_i}{7}\right)_r$ il numero delle retrogradazioni residuali dopo l'ultimo settenario completo, e quindi

$$L = 10 - \left(\frac{H + \left(\frac{H}{4}\right)_i}{7}\right)_r .$$

6. Come si è osservato, nel 1582 la lettera domenicale fu $G = 7$. Essendo $H = 1582$, sarà $\left(\frac{H}{4}\right)_i = 395$, ed $\left(\frac{H+\left(\frac{H}{4}\right)_i}{7}\right)_r = \left(\frac{1977}{7}\right)_r = 3$. Quindi $L = 10 - 3 = 7 = G$. Questa formola può servire dal principio dell'Era cristiana al dì 4 Ottobre 1582; sottraendo però 7 ogni qual volta $\left(\frac{H+\left(\frac{H}{4}\right)_i}{7}\right)_r$ sia 0, 1', 2';(4).

Allorchè nel 1582. il dì 5. Ottobre fu detto 15, furono nel tempo stesso soppressi 10 giorni. Ciò fu fatto perchè i bisesti fin' a quell' epoca aveano formato dieci giorni di più del dovere per ritenere l'equinozio nel dì 21 Marzo. Accaduta dunque la riforma vennero espresse le retrogradazioni per $H + \left(\frac{H}{4}\right)_i - 10$; onde $L = 10 - \left(\frac{H+\left(\frac{H}{4}\right)_i - 10}{7}\right)_r = 10 - 0 - 7 = 3 = C$ (4), come realmente fu la lettera domenicale nel 1582. 17. Ottobre. La medesima formola ha servito fino al 1699. Il 1700, essendo ogni secolo divisibile per 4, dovea essere bisestile, ma per la riforma i tre secoli dopo il 1600 sono comuni, ed il quarto secolo, cioè il 2000 sarà bisestile; quindi i tre secoli susseguenti al 2000 comuni, ed

il quarto bisestile e così in seguito. Nell' anno dunque 1700 le retrogradazioni diminuirono di tanto quanto erano i secoli trascorsi meno 16 secoli. Così nel 1700 le retrogradazioni diminuirono di $17-16=1$, nel 1800 di $18-16=2$, nel 1900 di $19-16=3$, nel 2000 di $20-16=4$. Ma ogni quarto secolo è bisesto; dunque le retrogradazioni diminuite per esempio di $20-16=4$ debbono aumentarsi di uno, ossia di $\left(\frac{20-16}{4}\right)_i=1$. Stando a queste regole si dica K un numero qualunque di secoli, che per altro minori non siano del decimo sesto secolo e sarà $L=10-\left(\frac{H+\left(\frac{H}{4}\right)_i-10-(K-16)+\left(\frac{K-16}{4}\right)_i}{7}\right)_r$.

Dovendo essere L positivo, e non potendo superare il 6 dovrebbe esprimersi $L=\left(\frac{10-H+\left(\frac{H}{4}\right)_i-10-(K-16)+\left(\frac{K-16}{4}\right)_i)_r}{7}\right)_r$.

Diviene così la formola molto complicata, ma è facile ridurla a maggior semplicità. In questa frazione il valore di L deve essere positivo e minore di 7. Si prenda dunque a considerare la frazione simile $\left(\frac{C-\left(\frac{D}{7}\right)_r}{7}\right)_r$ nella quale sia l' indicato residuo positivo. Il 7. potrà contenersi in D un dato qualunque numero $n$ di volte, rimanendo il residuo $\left(\frac{D}{7}\right)_r$. Essendo dunque $n$ zero, o qualunque intero numero, sarà $D=n7+\left(\frac{D}{7}\right)_r$, e $-\left(\frac{D}{7}\right)_r=-D+n7$. Dunque $\left(\frac{C-\left(\frac{D}{7}\right)_r}{7}\right)_r=\left(\frac{C-D+n7}{7}\right)r$, residuo positivo. Sarà dunque similmente il valore positivo di $L=\left(\frac{10-H-\left(\frac{H}{4}\right)_i+10-16+K-\left(\frac{K}{4}\right)_i+4+n7}{7}\right)_r$

$$=\left(\frac{8-H-\left(\frac{H}{4}\right)_i+K-\left(\frac{K}{4}\right)_i+n7}{7}\right)_r=\left(\frac{1-H-\left(\frac{H}{4}\right)_i+K-\left(\frac{K}{4}\right)_i+n7}{7}\right)_r.$$

Rappresentando L positivo il residuo della divisione, sarà quindi la quantità $1-H-\left(\frac{H}{4}\right)_i+K-\left(\frac{K}{4}\right)_i+7n-L$ esattamente divisibile per 7. Se dunque alla quantità medesima si aggiunga un multiplo qualunque di 7. sarà sempre la quantità divisibile esattamente per 7. Si rifletta ora, che $\left(\frac{H}{4}\right)_i$ è uguale all' intero H meno il residuo, ossia $-\left(\frac{H}{4}\right)_r$ diviso tutto per 4. Sarà dunque $\left(\frac{H}{4}\right)_i=\frac{H-\left(\frac{H}{4}\right)_r}{4}$, e similmente sarà $\left(\frac{H}{7}\right)_i=\frac{H-\left(\frac{H}{7}\right)_r}{7}$ e quindi $H-\left(\frac{H}{7}\right)_r$ sempre esattamente divisibile per 7, come suo multiplo. Sarà dunque $1-H-\frac{H+\left(\frac{H}{4}\right)_r}{4}+K-\left(\frac{K}{4}\right)_i+n7-L$ esattamente divisibile per 7. Si aggiunga ora primieramente $\frac{-7H+7\left(\frac{H}{4}\right)_r}{4}$ multiplo di 7, e quindi anche $3H-3\left(\frac{H}{7}\right)_r$ similmente multiplo di 7, e ne risulterà $1-3H+2\left(\frac{H}{4}\right)_r+3H-3\left(\frac{H}{7}\right)_r+K-\left(\frac{K}{4}\right)_i+7n-L$ esattamente divisibile per 7. Si aggiunga finalmente $7\left(\frac{H}{7}\right)_r$ e si sottragga $n7$ ambedue multipli di 7 e si avrà $1+2\left(\frac{H}{4}\right)_r+4\left(\frac{H}{7}\right)_r+K-\left(\frac{K}{4}\right)_i-L$ esattamente divisibile per 7. La natura dunqne della semplice

divisione dimostra essere il residuo positivo $L=\left(\frac{1+2\left(\frac{H}{4}\right)_r+4\left(\frac{H}{7}\right)_r+K-\left(\frac{K}{4}\right)_i}{7}\right)_r$. Servirà questa formola della lettera domenicale per un dato qualunque anno dopo la riforma, e se ne può fare uso, applicandola alla tanto nota formola del Ch. Dottor Gauss risguardante la Pasqua. Se si prenda la lettera domenicale innanzi la riforma si trova $L=10-\left(\frac{H+\left(\frac{H}{4}\right)_i}{7}\right)_r$ (5), ed il calcolo ora usato darà $L=\left(\frac{3+2\left(\frac{H}{4}\right)_r+4\left(\frac{H}{7}\right)_r}{7}\right)_r$. Sia da determinarsi la lettera domenicale del 1818, sarà $H=1818$, $\left(\frac{H}{4}\right)_i=454$, $-(f-16)=-(18-16)=-2$; dunque $L=10-\left(\frac{2260}{7}\right)_r$ $=10-6=4=D$.

7. La formola $L=10-\left(\frac{H+\left(\frac{H}{4}\right)_i-10-(K-16)}{7}\right)_r$ dal 1700 servirà a tutto il 1999 in cui si trova $L=10-\left(\frac{2485}{7}\right)_r$ $=10-0=10-7.=3=C$ (4). Nel 2000 bisognerà introdurre l'ultimo termine $\left(\frac{K-16}{4}\right)_i=\left(\frac{20-16}{4}\right)_i=1$, e sarà $L=10-\left(\frac{2487}{7}\right)_i=10-2-7=1=A$ (4). Può sembrare che la formola sia molto composta, potendosi rendere più semplice sì rispetto agl' anni prima della riforma come a quelli posteriori (6). Si è creduto però bene di rappresentare in una medesima formola la lettera domenicale per qualunque anno anteriore, o posteriore alla riforma. Prova di ciò può essere per esempio l' erudita ricerca, che si fa, se sia stata sempre costumanza della Chiesa ordinare i Vescovi in giorno di domenica. Il dotto Cardinal Noris rileva da un codice vaticano se-

gnato 446, che Menna C. P. fu fatto Vescovo il dì 13. Marzo dopo il Consolato, che di nuovo prese Paolino Juniore. Dalli fasti di Vittorio Aquitano si sa, che ciò fu nell' anno 536, poichè Paolino prese il Consolato nel 534, e quindi nelli due susseguenti anni tenne il Consolato d'Occidente. Dunque il Consolato di nuovo preso da Paolino cade nel 536 anno bisestile. Si prendano dunque nella formola i soli due primi termini, onde sia $L = 10 - \left(\frac{H + \left(\frac{H}{4}\right)_i}{7}\right)_r = 10 - \left(\frac{536+134}{7}\right)_r =$ $10 - 5 =$ E. Fu dunque E la lettera domenicale. Ma il dì 13. Marzo ha per lettera B. Dunque Menna fu ordinato Vescovo nel giovedì 13. Marzo An. 536.

8. Si è osservato che diversi numeri costanti possono ottenersi dalla diversa combinazione delli numeri esprimenti le retrogradazioni semplici (4). Queste diverse combinazioni appartengono alli diversi anni dell' Era cristiana ed innanzi la medesima, e da queste diverse combinazioni possono ottenersi diverse formole atte tutte a determinare la lettera domenicale.

*Era Cristiana.*

ANNO I.

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| A | B | C | D | E | F | G |
| 2· | 1· | 7· | 6· | 5· | 4· | 3· |

ANNO II.

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| A | B | C | D | E | F | G |
| 1· | 7· | 6· | 5· | 4· | 3· | 2· |

ANNO III.

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| A | B | C | D | E | F | G |
| 7· | 6· | 5· | 4· | 3· | 2· | 1· |

ANNO VI.

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| A | B | C | D | E | F | G |
| 3· | 2· | 1· | 7· | 6· | 5· | 4· |

ANNO IX.

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| A | B | C | D | E | F | G |
| 6· | 5· | 4· | 3· | 2· | 1· | 7· |

*Innanzi l' Era cristiana.*

ANNO I.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| A | B | C | D | E | F | G |
| 3· | 2· | 1· | 7· | 6· | 5· | 4· |

ANNO II.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| A | B | C | D | E | F | G |
| 4· | 3· | 2· | 1· | 7· | 6· | 5· |

ANNO III.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| A | B | C | D | E | F | G |
| 5· | 4· | 3· | 2· | 1· | 7· | 6· |

ANNO IV.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| A | B | C | D | E | F | G |
| 7· | 6· | 5· | 4· | 3· | 2· | 1· |

ANNO V.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| A | B | C | D | E | F | G |
| 1· | 7· | 6· | 5· | 4· | 3· | 2. |

ANNO IX.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| A | B | C | D | E | F | G |
| 6· | 5· | 4· | 3· | 2· | 1· | 7· |

Paragonando queste diverse combinazioni con quella dell' anno primo dell' Era si rileva, che in quelle dell' Era medesima l' 1· esprimente la prima semplice retrogradazione diviene retrogrado per quanti sono gli anni dopo il primo trascorsi, e quanti i bisesti. Così per esempio nell'An. VI. l' 1· rispetto al primo anno è retrogrado di sei giorni quanti per appunto sono i cinque anni dopo il primo ed un bisesto trascorso. Nelle combinazioni poi innanzi l' Era l' 1· esprimente la semplice retrogradazione procede direttamente secondo l' ordine delle lettere per quanti sono gli anni antecedenti, e quanti i bisesti. Così nella combinazione dell' anno IX. l' 1· rispetto alla combinazione dell'anno primo dell' Era, tiene nelle lettere domenicali il luogo undecimo quanti appunto sono gl' anni nove antecedenti, più i due bisesti. Da qualunque dunque delle sei combinazioni dell' Era volendo andare all' anno primo, sarà necessario sottrarre dalle retrogradazioni dell' anno e bisesti dati tante retrogradazioni quante ne dà la com-

binazione che si prende. Al contrario da qualunque delle sei combinazioni innanzi l'Era volendo andare all'anno primo dell'Era, sarà necessario aggiugnere tante retrogradazioni a quelle, che si hanno dall'anno dato e bisesti, quanti ne dà la combinazione, che si prende. Fermo rimanendo quanto si è detto (4), i numeri costanti per l'anno I. II. III. ec. dell'Era sono 10, 9, 8, 13, 12, 11, 14. Similmente innanzi l'Era i numeri costanti degli anni I. II. III. IV. ec. sono 11, 12, 13, 8, 9, 14. questi sono i medesimi numeri costanti indicati (4).

9. È ben chiaro, che questi diversi numeri costanti, purchè s'osservi quanto si è rilevato (4), possono dare altrettante formole per la lettera domenicale. Si scelga per esempio fra tutte queste diverse combinazioni quella dell'anno nono innanzi, e dopo l'Era. In queste due combinazioni il numero costante è 14. Siccome poi l'1° nella combinazione dell'anno IX. innanzi l'Era è diretto nell'ordine delle lettere di 11, quindi per andare all'anno primo dell'Era bisogna aggiugnere 11. retrogradazioni (8). Al contrario nell'anno IX. dell'Era l'1° presenta 10. retrogradazioni già fatte le quali bisogna sottrarre per andare all'anno primo (8). Siano per brevità i termini dopo la riforma $\left(-10-(K-16)+\left(\frac{K-16}{4}\right)_i\right)=-A$, e sarà espresso il numero totale delle retrogradazioni per $H+\left(\frac{H}{4}\right)_i \begin{matrix}+11\\-10\end{matrix} - A$, onde $L=14-\left(\frac{H+\left(\frac{H}{4}\right)_i \begin{matrix}+11\\-10\end{matrix} - A}{7}\right)_r$. Ma togliendo, o aggiungendo un settenario nel numeratore della frazione il residuo è sempre lo stesso. Dunque $L=14-\left(\frac{H+\left(\frac{H}{4}\right)_i \begin{matrix}+4\\-3\end{matrix} - A}{7}\right)_r$. Nella medesima maniera si operi in tutte le diverse combinazioni le quali hanno un medesimo numero costante.

Negli anni dunque diversi dell'Era, ed innanzi l'Era IV. e III'; V. e II'; VI. e I'; I; II. e V'; III. e IV'; i quali hanno per numero costante (8) 13, 12, 11, 10, 9, 8 sarà, pel me-

todo ora usato, il numero totale delle retrogradazioni espresso per $H+\left(\frac{H}{4}\right)_i \begin{matrix}+3\\-4\end{matrix} - A$; $H+\left(\frac{H}{4}\right)_i \begin{matrix}+2\\-5\end{matrix} - A$, $H+\left(\frac{H}{4}\right)_i \begin{matrix}+1\\-6\end{matrix} - A$; $H+\left(\frac{H}{4}\right)_i - A$; $H+\left(\frac{H}{4}\right)_i \begin{matrix}+6\\-1\end{matrix} - A$; $H+\left(\frac{H}{4}\right)_i \begin{matrix}+5\\-2\end{matrix} - A$.

Si troverà dunque.

An. III. $L = 8 - \left(\frac{H+\left(\frac{H}{4}\right)_i \begin{matrix}+5\\-2\end{matrix} - A}{7}\right)_r$ An. IV'.

An. II. $L = 9 - \left(\frac{H+\left(\frac{H}{4}\right)_i \begin{matrix}+6\\-1\end{matrix} - A}{7}\right)_r$ An. V'

An. I. $L = 10 - \left(\frac{H+\left(\frac{H}{4}\right)_i - A}{7}\right)_r$ An. I

An. VI. $L = 11 - \left(\frac{H+\left(\frac{H}{4}\right)_i \begin{matrix}+1\\-6\end{matrix} - A}{7}\right)_r$ An. I'

An. V. $L = 12 - \left(\frac{H+\left(\frac{H}{4}\right)_i \begin{matrix}+2\\-5\end{matrix} - A}{7}\right)_r$ An. II'

An. IV. $L = 13 - \left(\frac{H+\left(\frac{H}{4}\right)_i \begin{matrix}+3\\-4\end{matrix} - A}{7}\right)_r$ An. III'

An. IX. $L = 14 - \left(\frac{H+\left(\frac{H}{4}\right)_i \begin{matrix}+4\\-3\end{matrix} - A}{7}\right)_r$ An. IX'.

Sembrerà che tredici diverse formole possano dare la lettera domenicale L. Quando dunque tutte queste formole apparentemente diverse si trattino col metodo usato (6) tutte si riducono all' identica formola

$$L = \left(\frac{1+2\left(\frac{H}{4}\right)_i + 4\left(\frac{H}{7}\right)_r + K - \left(\frac{K}{4}\right)_i}{7}\right)_r .$$

10. Dalla diversa disposizione delli numeri retrogradi dipendono evidentemente le diverse formole della lettera domenicale. Per dimostrare sempre più questa verità, si distri-

buiscano le lettere domenicali nella seguente maniera corrispondente all' anno primo dell' Era.

| Periodo I. incompleto | | Periodo I. completo | | | | | | | Periodo II. completo | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| A | B | A | B | C | D | E | F | G | A | B | C | D | E | F | G |
| 2· | 1· | 9· | 8· | 7· | 6· | 5· | 4· | 3· | 16· | 15· | 14· | 13· | 12· | 11· | 10· |
| | | 7· | 6· | 5· | 4· | 3· | 2· | 1· | 7· | 6· | 5· | 4· | 3· | 2· | 1· |
| | | 2· | 2· | 2· | 2· | 2· | 2· | 2· | 2·+7, | 2·+7, | 2·+7, | 2·+7, | 2·+7, | 2·+7, | 2·+7· |

Il primo periodo si dice incompleto come formato dalle sole lettere domenicali B, A. Si dice I, II, III, ec. periodo completo perchè composto da tutte le sette lettere domenicali, alle quali, incominciando da A corrispondono i numeri 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, e le retrogradazioni semplici incominciando in G dall' 1·, crescono fino al 7 in A. Ciò posto le retrogradazioni complete in qualunque periodo completo altro non sono, che le retrogradazioni passate più le retrogradazioni semplici del periodo completo, che si prende a considerare. Così nella disposizione fatta le retrogradazioni passate del periodo incompleto sono 2·, e quindi 2·+1·, 2·+2·, 2·+3·, 2·+4·, 2·+5·, 2·+6·, 2·+7·, danno le retrogradazioni del periodo I. completo, e sono 3·, 4·, 5·, 6·, 7·, 8·, 9·. Similmente nel periodo secondo completo le retrogradazioni passate sono 2·+7·, e quindi 2·+7·+1·, 2·+7·+2·, 2·+7·+3·, 2·+7·+4·, 2·+7·+5·, 2·+7·+6·, 2·+7·+7· danno le retrogradazioni del medesimo periodo, e sono 10·, 11·, 12·, 13·, 14·, 15·, 16·. Costantemente in qualunque periodo completo le retrogradazioni semplici più il numero corrispondente alla lettera domenicale dà 8=1·+7, 2·+6, 3·+5 ec. Dunque se le retrogradazioni passate genericamente si dicano R, sarà in qualunque periodo completo espressa per R+8 = R+1+7 = R+2+6= R+3+5. ec. la somma di una qualunque retrogradazione esistente nel medesimo periodo più il numero della lettera domenicale corrispondente. Così nel periodo I. completo essendo le retrogradazioni passate R=2·, sarà 2·+1·+7 = 3·+7 = 4·+6= 5·+5 = 6·+4 = 7·+3 = 8·+2 = 9·+1. Similmente nel periodo

II. completo essendo R=2'+7', sarà 2'+1'+7'+7 = 10'+7 = 11'+6 = 12'+5 = 13'+4 = 14'+3 = 15'+2 = 16+1. Nel periodo III. completo sarà R=2'+7'+7', onde 2'+1'+7'+7'+7= 17'+7=18'+6 = 19'+5 = 20'+4 = 21'+3 = 22'+2 = 23'+1. È perciò evidente, che una qualunque retrogradazione esistente nel periodo I. completo sarà espressa per 2+1+7. Nel periodo II. completo per 2+1+2×7. Nel periodo III. per 2+1+3×7, nel IV. per 2+1+4×7, e così successivamente. Se dunque qualunque periodo completo si dica I, II, III, IV, o genericamente $n$, sarà una qualnnque retrogradazione esistente in questo medesimo periodo generico $n$ espressa per $7n+2+1$. Ma le retrogradazioni esistenti in qualunque periodo prima della riforma sono espresse per $H+\left(\frac{H}{4}\right)$ (5), e dopo la riforma si esprimono per $H+\left(\frac{H}{4}\right)_i - 10 - (S-16)+\left(\frac{S-16}{4}\right)_i$ (6). Dunque chiamando $L$ il numero della lettera domenicale, sarà generalmente $7n+3 = L+H+\left(\frac{H}{4}\right)_i - 10 - (K-16) + \left(\frac{K-16}{4}\right)_i$, e quindi $L = 7n+3+10-\left(H+\left(\frac{H}{4}\right)_i - (K-16) + \left(\frac{K-16}{4}\right)_i\right) = 7n+6+7-\left(H+\left(\frac{H}{4}\right)_i - (K-16)+\left(\frac{K-16}{4}\right)_i\right)$. Ponendo poi il settenario completo 7 nel valore delle unità dell' indeterminata $n$, sarà $L = 7n+6-\left(H+\left(\frac{H}{4}\right)_i - (K-16) + \left(\frac{K-16}{4}\right)_i\right)$. Questa è l' identica equazione del Sig. Cav. Delambre (*a*), dimostrata ora con maggior precisione ed evidenza. Può quì rilevarsi, che se le combinazioni degli anni dell' Era, ed innanzi l' Era volessero disporsi come è quì disposta la combinazione dell' anno I. dell'Era, sarebbe in questo caso nel periodo I. incompleto dell' anno I, II, III, IV,

(*a*) *Connais. des tems* 1817. *pag.* 307.

V, VI, IX, dell'Era (8) R=2, R=1, R=0, R=5, R=4, R=3, R=6. Negli anni poi I', II', III', IV', V', IX' innanzi l'Era sarebbe (8) R=3, R=4, R=5, R=0, R=1, R=6. Procedendo dunque nella maniera medesima, e per brevità ponendo $\left(-10-(K-16)+\left(\frac{K-16}{4}\right)_i\right)=-A$ sarà (8. 9.)

$$L=7n+3-\left(H+\left(\frac{H}{4}\right)_i-A\right) \qquad L=7n+4-\left(H+\left(\frac{H}{4}\right)_i+1-A\right)$$
$$L=7n+2-\left(H+\left(\frac{H}{4}\right)_i-1-A\right) \qquad L=7n+5-\left(H+\left(\frac{H}{4}\right)_i+2-A\right)$$
$$L=7n+1-\left(H+\left(\frac{H}{4}\right)_i-2-A\right) \qquad L=7n+6-\left(H+\left(\frac{H}{4}\right)_i+3-A\right)$$
$$L=7n+6-\left(H+\left(\frac{H}{4}\right)_i-4-A\right) \qquad L=7n+1-\left(H+\left(\frac{H}{4}\right)_i+5-A\right)$$
$$L=7n+5-\left(H+\left(\frac{H}{4}\right)_i-5-A\right) \qquad L=7n+2-\left(H+\left(\frac{H}{4}\right)_i+6-A\right)$$
$$L=7n+4-\left(H+\left(\frac{H}{4}\right)_i-6-A\right) \qquad L=7n-\left(H+\left(\frac{H}{4}\right)_i+4-A\right)$$
$$L=7n-\left(H+\left(\frac{H}{4}\right)_i-3-A\right)$$

11. Potranno sembrare diverse queste formole; se però si rifletta, le formole dell'anno II, III, IV, V, VI, IX, dell'Era sono identiche colla medesima formola dell'anno I. Le formole poi dell'anno I', II', III', innanzi l'Era sono identiche colla formola dell'anno I. dell'Era e le tre ultime formole dell'anno IV', V', IX' sono identiche colla medesima formola $L=7n-4-\left(H+\left(\frac{H}{4}\right)_i-A\right)$. Tutte dunque le possibili formole alla maniera usata dal Sig. Cav. Delambre si riducono a due, e sono $L=7n\overset{+}{-}\overset{3}{4}-\left(H+\left(\frac{H}{4}\right)_i-A\right)$. Queste due formole poi possono sempre ridursi alla medesima del Cav. Delambre $L=7n+6-H-\left(\frac{H}{4}\right)_i+K-16-\left(\frac{K-16}{4}\right)_i$.

12. La formola medesima del Sig. Delambre può anche facilmente dedursi dalla nostra formola

$L = 10 - \left(\frac{H + \left(\frac{H}{4}\right)_i - 10 - (K-16) + \left(\frac{K-16}{4}\right)_i}{7}\right)_r$ (6). Per brevità il numeratore della frazione si dica B, onde sia $L = 10 - \left(\frac{B}{7}\right)_r$. Essendo $\left(\frac{B}{7}\right)_i$ un numero qualunque intero, si dica questo numero $n$. Dalla pura ed elementare aritmetica si sa, che il quoto numero intero multiplicato pel divisore, più il residuo dà il dividendo. Sarà dunque $7n + \left(\frac{B}{7}\right)_r = B$ e $7n - B = -\left(\frac{B}{7}\right)_r$. Sostituendo ora il valore di B si trova $L = 10 + 7n - \left(H + \left(\frac{H}{4}\right)_i - 10 - (K-16) + \left(\frac{K-16}{4}\right)_i\right) = 7 + 3 + 7 + 3 + 7n - \left(H + \left(\frac{H}{4}\right)_i - (K-16) + \left(\frac{K-16}{4}\right)_i\right) = 7n + 7 + 7 + 6 - \left(H + \left(\frac{H}{4}\right)_i - (K-16) + \left(\frac{K-16}{4}\right)_i\right)$. Finalmente, come si è fatto superiormente (9) ponendo li due settenarj completi $7 + 7$ nel valore delle unità indeterminate di $n$ si otterrà $L = 7n + 6 - \left(H + \left(\frac{H}{4}\right)_i - (K-16) + \left(\frac{K-16}{4}\right)_i\right)$.

13. Un metodo consimile usato nelle nostre sette formole (9) ci conduce a dimostrare le formole (10) per altra via già dimostrate. Si prenda per esempio la nostra formola ultima. $L = 14 - \left(\frac{H + \left(\frac{H}{4}\right)_i \overset{+4}{-3} - A}{7}\right)_r$. Si dica B il numeratore della frazione, onde sia $L = 14 - \left(\frac{B}{7}\right)_r$. Sarà dunque $\left(\frac{B}{7}\right)_i$ un numero qualunque intero il quale prima della riforma ed essendo H minore di 3 sarà zero, e divenendo H=3, potrà essere zero, o anche uno. Si dica questo numero $n$ ed atteso il principio ora esposto sarà $7n - B = -\left(\frac{B}{7}\right)_r$. Sostituendo dunque si trova $L = 14 + 7n - \left(H + \left(\frac{H}{4}\right) \overset{+4}{-3} - A\right) =$

$7n+7+7\,{}^{+3}_{-4} - \left(H+\left(\frac{H}{4}\right)_i - A\right)$; ossia (9. 12.)

$7n\,{}^{+3}_{-4} - \left(H+\left(\frac{H}{4}\right)_i - A\right) = L$. Qualunque altra delle nostre formole (9) si vogli esperimentare, tutte uniformemente, collo stesso metodo ora usato danno $L=7n+3-\left(H+\left(\frac{H}{4}\right)_i - A\right)$.

14. Quando non si volesse attendere che ad una formola la quale dal 1600 dasse per qualunque anno susseguente la lettera domenicale, questa diviene semplicissima e dopo un periodo di 400 anni tornano le lettere domenicali a prendere il medesimo ordine. L'anno 1600 fu bisesto, e le due lettere domenicali furono B, A (6). Nel primo anno dopo il 1600 fu G la lettera domenicale, e l'ordine delle lettere corrisponde all'anno III. dell'Era (8) del quale è data la formola della lettera domenicale (9). Da questo primo anno contando gl'anni susseguenti, si tenga fermo, che tre secoli consecutivi sono sempre comuni, ed il quarto bisesto. Si dica dunque H' un'anno qualunque dopo il 1600, ed S' esprima il numero de' secoli, che contiene l'anno dato H'. Sarà dunque (8. 9.) $L = 8 - \left(\frac{H'+\left(\frac{H'}{4}\right)_i - S'+\left(\frac{S'}{4}\right)_i}{7}\right)_r$. Sia da determinarsi la lettera domenicale dell'anno 1818 Sarà $H'=218$; $\left(\frac{H'}{4}\right)_i = 54$, $S'=2$; $\left(\frac{S'}{4}\right)_i = 0$. Dunque $L = 8 - \left(\frac{270}{7}\right)_r = 8-4=4=D$. Questa formola dimostra, che per ogni periodo di anni 400, dopo il 1600 ritorna il medesimo periodo delle lettere domenicali. Così essendo H' ed S' zero sarà $L = 8-7=1=A$; come già fu nel 1600 bisestile; posto $H'=400, 800, 1200$ ec. sarà $S'=4, 8, 12$ ec. e quindi ritornando il secolo bisestile ritorna pur anche $L=8-7=1=A$.

# MEMORIA

## SOPRA UN CANNOCCHIALE ICONANTIDIPTICO

DEL SIGNOR PROFESSORE

GIO. BATTISTA AMICI

*Ricevuta adì* 29. *Marzo* 1821.

Il Sig. Jeaurat nel 1778. concepì l' idea di un nuovo cannocchiale rappresentante nel campo di vista due immagini di un oggetto una diritta, e l'altra rovesciata. Egli fece osservare fin d' allora che la costruzione di questo istrumento cui fu dato il nome d' iconantidiptico avrebbe potuto offrire alla Astronomia pratica i vantaggi di determinare con maggior precisione il passaggio di un astro al meridiano, e di escludere i fili nel fuoco dell' oculare coi quali si collima ad un qualunque oggetto celeste. Scorgendosi infatti con questo mezzo due immagini contrapposte di una medesima stella, l'una pel moto diurno attraversante il campo da destra a sinistra, e l' altra da sinistra a destra, il punto del loro concorso avrebbe stabilito la posizione dell' asse del cannocchiale, ed il momento dell' incontro delle due immagini, ossia il tempo del passaggio per l'asse si sarebbe meglio determinato, che dall' appulso a un filo solo degli ordinarj strumenti de' passaggi. Imperocchè la velocità rispettiva delle immagini, che si movono in contrario senso, è doppia della velocità assoluta di una sola immagine che successivamente si accosta ad un filo immobile del micrometro.

L' apparente utilità che quindi si attendeva dal nuovo istrumento fece che altri Ottici, e Matematici distinti si occupassero dell' invenzione del Sig. Jeaurat o per migliorare la forma del cannocchiale che egli aveva proposto, o per

determinare colla teoria l' effetto di cui fosse suscettibile. Kratzenstein, Eulero, Boscowich trattarono quasi contemporaneamente questo soggetto, ed esibirono varie combinazioni di lenti atte tutte a produrre la doppia immagine richiesta. Alla costruzione di Jeaurat consistente in un semplice oculare combinato con un ampio obbiettivo forato in centro, onde vedere l' immagine rovescia, e combinato nel tempo stesso con due minori obbiettivi, onde formare coi raggi attraversanti il foro l' immagine diritta, fu sostituito da Kratzenstein un obbiettivo non forato per l' immagine capovolta, e due obbiettivi più piccoli interni per ottenere l' immagine nella sua situazione naturale da contemplarsi poi con un oculare comune.

Così sembrò ad Eulero di semplificare il cannocchiale adoperando un obbiettivo, e tre oculari per raddrizzar l' oggetto e per capovolgerlo usando di due oculari, de' quali uno forato.

Niuna però di queste combinazioni fu riconosciuta esente di considerabili difetti; e l' Abbate Boscowich fece osservare col soccorso del calcolo che un cannocchiale iconantidiptico a tre obbiettivi acromatici produce un effetto molto minore di quello di un cannocchiale comune, che sia lungo la metà di esso. Per la qual cosa il vantaggio dovuto al doppio movimento in direzione contraria delle due immagini può del pari ottenersi, ed anche con miglior successo, adoperando un cannocchiale ordinario con amplificazione doppia o più che doppia, della quale sarebbe suscettibile avendo una lunghezza eguale a quella dell' iconantidiptico.

Egli inoltre avvertì che i fili si rendono indispensabili nell' uso anche del nuovo istrumento: poichè l' incontro delle due immagini di una stella non potendo che effettuarsi nell'asse del cannocchiale, ossia nel centro del campo dell' oculare ben regolato, se le immagini coll' ajuto di un filo non si facessero percorrere il diametro di questo campo, non si riescirebbe mai ad ottenere l' incontro delle medesi-

me. Esse passerebbero l' una sopra l' altra camminando per due corde parallele. Che se il corpo celeste avesse un estensione sensibile, si giugnerebbe con sicurezza a procurare il contatto de' diametri orizzontali delle due immagini, allorquando solamente queste si trovassero racchiuse da due fili paralleli orizzontali ed equidistanti dal centro del campo.

Tutte queste imperfezioni palesate da un ottico di tanta celebrità contribuirono forse a porre in dimenticanza l'idea di Jeaurat, e a dichiarare l' istrumento iconantidiptico di niun vantaggio nell' Astronomia.

Ed è in vero fuor di ogni dubbio che non potendosi sopprimere i fili di direzione, viene a mancare all' istrumento il bellissimo pregio di cui l' inventore credeva d' averlo fornito, e che poteva solo renderlo utile nelle osservazioni del cielo.

Esaminando io però alcuni anni sono questo medesimo soggetto, mi accorsi ben tosto che una parte delle imperfezioni poteva togliersi sostituendo alle lenti gli specchj di metallo, e che un telescopio catadiottrico ordinario si sarebbe convertito con facilità in iconantidiptico senza scemare la forza di lui amplificante.

Le condizioni alle quali converrebbe soddisfare per ottener un buon effetto nel tubo iconantidiptico sono: l'eguaglianza d' ingrandimento nelle due immagini: che queste si dipingano nel medesimo piano e precisamente nel fuoco dell' oculare comune per vederle contemporaneamente: che siano formate dal concorso di un' eguale quantità di raggi per avere la medesima chiarezza: e che infine l'aberrazione de' raggi sia in ognuna la stessa per ottenere l' eguaglianza di distinzione. Ora tutto ciò viene adempito di leggieri col disporre tra gli specchj di un telescopio Gregoriano un mezzo specchietto convesso per modo che in un tubo solo abbiasi riunita la costruzione di Gregory affine di mostrare gli oggetti diritti, e quella di Cassegrain per presentarli capovolti.

Ma poichè il peso de' telescopj catodiottrici, e il facile sconcerto cui vanno soggetti, impediscono di applicarli con profitto a macchine graduate, abbandonai questo pensiero, tanto più che con tal mezzo non avrei potuto non ammettere l' uso de' fili.

Rivolte quindi le mie ricerche a cannocchiali diottrici, mi riuscì di trovar modo di renderli con singolare semplicità iconantidiptici ed esenti da tutte quelle imperfezioni delle quali di sopra si è ragionato. La lusinga per tanto che il nuovo cannocchiale al presente stato ridotto possa essere di qualche giovamento alla scienza, mi ha mosso a farne pubblica la costruzione.

Il raddoppiamento delle immagini in contraria posizione situate non dipende da alcun particolare obbiettivo od oculare. Le sole lenti che entrano nella formazione del comune cannocchiale terrestre coll' aggiunta di un prismetto di vetro isoscele rettangolo o semplicemente isoscele, avente poche linee di larghezza costituiscono tutta la nuova macchina.

Si sa dalla Catottrica che un raggio di luce cessa di essere riflesso da uno specchio piano allorchè l' angolo d' incidenza arriva a novanta gradi; e che perciò ne deriva l' impossibilità di vedere per riflessione un oggetto situato nel prolungamento del piano riflettente. Egli è pur anche a tutti noto non potersi per raggi ripercossi scorgere un oggetto che si trovi al disotto del piano riflettente medesimo. Questi ostacoli però vengono tolti se invece di uno specchio si fa uso di un prisma isoscele di vetro nella cui faccia disuguale si eseguisca internamente la riflessione.

Col favore del piegamento all' entrata nella prima faccia del prisma i raggi paralleli al piano riflettente, e quelli anche che hanno una discreta obbliquità verso la parte rovescia del piano stesso si inclinano sul medesimo, in modo da poter subire la riflessione dopo la quale escono di bel nuovo rifraugendosi in contrario senso, per cui si corregge l' effetto anche di dispersione che su di essi era stato prodot-

to. Un prisma quindi di questa specie è atto a mostrare distintamente un oggetto per riflessione, sebbene l' occhio e l' oggetto si trovino nella direzione del piano riflettente o al di sotto del piano medesimo. È da questa proprietà che io ho tratto profitto per la costruzione del presente cannocchiale iconantidiptico, e per quella di diversi strumenti che formeranno il soggetto d' altre memorie. Io colloco nel fuoco posteriore dell' oculare più prossimo all' obbiettivo un piccolo prisma di vetro isoscele rettangolo, in modo che il suo piano opposto all' angolo retto si trovi nell' asse del cannocchiale, e che i suoi due angoli refringenti seghino perpendicolarmente l' asse stesso. In questa situazione è evidente che esso divide per mezzo ciascun fascio di raggi paralleli appartenenti ai diversi punti dell'oggetto e fa subire ai medesimi una riflessione (1). La parte quindi di luce non intercetta dal prisma, che è quanto dire, la tramandata dalla metà dell' obbiettivo, passando pei seguenti oculari del co-

(1) Il prisma situato in questo modo fa uscire paralleli all'asse del cannocchiale que' raggi che prima erano paralleli all' asse stesso, ma li trasporta alcun poco verso il suo angolo retto, per cui dopo la riflessione e le rifrazioni non camminano più per il prolungamento delle direzioni precedenti. Questo allontanamento de' raggi dall'asse sarebbe pregiudicevole ogni qualvolta la pupilla non potesse tutti abbracciarli, unitamente agli altri fasci luminosi che escono dagli oculari senza essere stati riflessi. Quantunque però col regolare opportunamente i fuochi e le distanze delle lenti oculari si potesse togliere il suddetto inconveniente, che avrebbe soltanto luogo nei piccoli ingrandimenti, pure più semplicemente si evita, disponendo il prisma in maniera che il raggio costituente l' asse del cannocchiale tagli i lati uguali della base triangolare del medesimo prisma parallelamente al lato disuguale del triangolo ed a tale distanza, che supponendolo rifratto da uno de' due lati uguali dovesse riflettersi nel punto di mezzo del terzo lato. In tal situazione che facilmente si trova col calcolo o coll' esperimento, il pennello ottico riflesso non si scosta dall' altro non riflesso. È poi d' avvertirsi che se si vuole assoluta uguaglianza di splendore nelle due immagini di un oggetto, conviene che il prisma intercetti un poco più della metà de' fasci luminosi per compensare la piccolissima perdita di luce nel passaggio pel prisma.

mune cannocchiale terrestre, mostra all'osservatore l' oggetto diritto; e l'altra metà per essere stata riflessa nell' interno del prisma fa vedere l'oggetto rovesciato. In uno stesso campo adunque coll' apparecchio descritto si possono contemplare due immagini contrapposte di un oggetto senza punto diminuire la bontà del cannocchiale. E poichè il rovesciamento si fa soltanto per un verso, cioè nel senso della riflessione, il contatto delle due immagini non ha luogo come nell' antico cannocchiale iconantidiptico nel centro del campo, ma può effettuarsi in tutti i punti di un diametro del campo medesimo. Questa particolare circostanza ci permette di poter osservare le altezze o i passaggi di un astro senza il soccorso de' fili, lo che deve tenersi per pregevolissimo vantaggio, se si considera che con questo mezzo si possono determinare le posizioni di tutti que' corpi celesti, i quali per la debolezza della loro luce sfuggono alla vista ogni qual volta si cerca d' illuminare i fili. Egli è ben vero che le immagini separate non risplendono che pel concorso della metà de' raggi trasmessi dall' obbietivo, indeboliti ancor qualche poco dall' interposizione del prisma, e dal maggior numero d' oculari del cannocchiale terrestre in confronto dell' astronomico, ma questa perdita sulla visibilità dell' oggetto influisce assai meno che l' introduzione di un lume estraneo per iscorgere i sottilissimi fili nei cannocchiali comuni.

D' altronde nell' istante della soprapposizione delle immagini di una stella che è poi il punto interessante, tutta la forza del cannocchiale rimane in azione.

Quantunque però gli ordinarj fili siano infruttuosi nelle osservazioni dei corpi di languida luce, io non pretendo di escluderli affatto dal tubo iconantidiptico. Vi sono delle circostanze nelle quali è utile il loro uso, e l' istrumento che io propongo, unisce il doppio vantaggio di poter in un istante cambiarsi da cannocchiale iconantidiptico in cannocchiale ordinario astronomico, e viceversa senza che ne venga

benchè menomamente turbata la rettificazione della macchina.

In un istrumento de' passaggi con micrometro a cinque fili verticali ed uno orizzontale ben rettificati, se si toglie l'oculare astronomico, e vi si sostituisca il sistema degli oculari terrestri contenenti il prisma che ho descritto, esso si trasforma in iconantidiptico, e la rettificazione dell'istrumento rimane intatta, se con combinati movimenti rotatorio ed orizzontale si porta il tubo degli oculari presso il micrometro, in modo che le doppie immagini de' fili coincidano tra loro, cioè che il primo filo verticale si adossi al quinto il secondo al terzo ed il medio si soprapponga a se stesso. In questo processo si riconoscerà ancora se i fili verticali siano equidistanti dal medio, ed il cannocchiale iconantidiptico non sarà privo del vantaggio di poter prendere l'appulso delle immagini, anche sopra i diversi fili del micrometro. Così un circolo meridiano avente un filo verticale e due orizzontali pochi minuti secondi distanti tra loro per comprendere in mezzo la stella, si cangerà nello stesso modo in iconantidiptico, addattandovi il sopraddetto tubo in maniera che le doppie immagini dei due fili orizzontali coincidano. Ed io son di parere che la più grande utilità del principio della duplicazione delle immagini si abbia appunto nella sua applicazione al circolo meridiano. Imperocchè l'altezza dell'astro può meglio giudicarsi per ragione del doppio movimento delle immagini; ed il contatto di queste o la soprapposizione delle medesime si può esaminare durante tutto il tempo del loro transito attraverso il campo di visione senza l'ajuto di filo alcuno. Un'altra interessante proprietà del nuovo tubo iconantidiptico consiste poi nel poter vedere distintamente con esso gli oggetti celesti ed una mira meridiana discretamente vicina, senza che ne venga sconcerto nella rettificazione dell'istrumento. Ciò infatti si ottiene col muovere soltanto longitudinalmente le due lenti oculari più prossime all'occhio, o col cambiarle in altre due di diverso foco, imperocchè questa mutazione non

altera la posizione della linea in cui si deve fare il concorso delle due immagini dell' oggetto.

Tutti questi pregi pertanto se non m' inganno, raccomandano l' uso del nuovo istrumento ed ispirano qualche fiducia che esso possa essere dagli Astronomi osservatori favorevolmente accolto.

# MEMORIA

## SULLA COSTRUZIONE DI UN CANNOCCHIALE ACROMATICO SENZA LENTI ESEGUITO CON UN SOL MEZZO REFRINGENTE

DEL SIGNOR PROFESSORE

GIO. BATTISTA AMICI

*Ricevuta adì* 14. *Maggio* 1821.

È noto ai Fisici che guardando un oggetto attraverso un prisma si scorgono le sue dimensioni nel senso del piano di rifrazione diversamente alterate secondo che le faccie del prisma, ruotando intorno l'asse suo, variamente s'inclinano davanti l'occhio.

Col principio che il seno dell'angolo d'incidenza sta al seno dell'angolo di rifrazione in un rapporto costante è facile il dimostrare che indipendentemente anche dalla dispersione de'colori, l'oggetto guardato attraverso un prisma deve vedersi dilatato, e tanto maggiormente quanto è più grande la deviazione de'raggi prodotta dalla faccia posteriore del prisma stesso in confronto dell'altra prodotta dalla sua faccia anteriore. E che al contrario l'oggetto deve mostrarsi tanto più contratto o ristretto, sempre però per un sol verso, quanto è maggiore la deviazione nella prima faccia riguardo a quella della seconda. Quindi nel solo caso dell'uguaglianza d'inclinazione de'raggi nell'entrata, ed uscita dal prisma ossia nel caso della minima rifrazione dell'immagine, l'oggetto di piccola estensione non deve sensibilmente cambiare nelle sue forme.

Partendo io da questo fatto mi è riuscito di determinare una semplicissima combinazione di prismi tutti dello stesso vetro, dalla quale nel mentre ottiensi l'ingrandimento d'un oggetto come da un cannocchiale, si escludono pure i colori dell'iride, che toglierebbero la distinzione dell'im-

magine. Di questa combinazione di prismi, e di varie altre migliori suggeritemi da una nuova proprietà della luce rifratta, che in appresso esporrò, il presente mio scritto è destinato a dar breve conto.

Ma per comprendere meglio la costruzione del nuovo e più semplice istrumento, e per fissare le idee, noi supporremo che attraverso di un prisma avente l'asse disposto verticalmente si guardi un oggetto di forma quadrata situato con due suoi lati paralleli all' asse predetto. Egli è manifesto che se il tagliente del prisma venga rivolto verso l' oggetto quadrato, nel qual caso la deviazione de' raggi si fa maggiore nell' uscita del prisma che nell' entrata, l' oggetto stesso apparirà dilatato nella direzione orizzontale; ed il quadrato acquisterà la forma di un rettangolo. Frattanto se si prende un secondo prisma della stessa sostanza del precedente, e di un egual angolo refringente, disponendolo dietro il primo con il suo asse parallelo ai lati orizzontali del quadrato, e girandolo intorno all' asse medesimo, onde la quantità di sua rifrazione riesca eguale a quella del primo prisma, è parimente manifesto che col dilatare esso l' oggetto nella sola direzione verticale, trasformerà il rettangolo di nuovo in un quadrato, il quale però apparirà all' occhio, che guarda attraverso il sistema prismatico, sotto un angolo maggiore di quello sotteso dall' oggetto stesso veduto direttamente.

Con tutto che però la disposizione indicata de' prismi sia atta a produrre l' ingrandimento dell' oggetto, pure niun vantaggio ne deriverebbe se non si trovasse mezzo di togliere i colori, che in virtù delle rifrazioni de' due prismi sono dispersi nella direzione della diagonale del quadrato, e rendono così le parti di lui totalmente indistinte. Or niente è più agevole di tale correzione. Imperocchè se si considera che uno spettro colorato di una data grandezza può essere prodotto in due maniere diverse cioè, o col ruotare intorno l' asse un prisma di piccolo angolo per accrescere

la di lui rifrazione ; oppure col fare un prisma della stessa sostanza con un angolo refringente maggiore, sarà facile ( lasciando a parte la prima maniera che varierebbe le forme dell' immagine ) di determinare la grandezza dell' angolo da darsi a un terzo prisma , affinchè colla sua minima rifrazione produca uno spettro colorato della stessa lunghezza di quello che si ottiene dalla combinazione de' due prismi sopra indicati. Se questo terzo prisma adunque si pone dietro i due primi in modo che la di lui rifrazione si effettui nel senso della diagonale del quadrato, ed in direzione opposta alla rifrazione de' medesimi, esso correggerà la dispersione de' colori senza deformare l' oggetto ingrandito ; di modo che il sistema di questi tre soli prismi costituirà un cannocchiale acromatico eseguito con un sol mezzo refringente.

La grandezza degli angoli de' primi due prismi è arbitraria, ma riesce più vantaggioso il prendere assai piccoli questi angoli, poichè si ottiene dai medesimi con minori colori un maggior ingrandimento dell' oggetto; e non fa d' uopo d' accrescere di troppo l' angolo del terzo prisma che deve correggere i colori stessi. Se l' angolo poi del terzo prisma non fosse giustamente regolato per produrre nella sua minima rifrazione uno spettro colorato, come quello risultante dalla combinazione de' due primi prismi , l' oggetto ingrandito e reso acromatico riescirebbe deforme , ed invece di un quadrato si avrebbe l' immagine di un rombo. Questa deformità però potrebbe in pratica togliersi col variare l' inclinazione rispettiva dei due primi prismi , dal che per altro ne risulterebbe un diverso ingrandimento.

In un sistema di prismi di Crownglass aventi i primi un angolo di 6° 15′ ed il terzo un angolo di 28° 12′ ho ottenuto l' amplificazione di due volte circa.

L' unione de' tre prismi fatta nel modo che ho esposto non è in vero la più favorevole a formare un cannocchiale acromatico , essa non è nemmeno la prima idea che mi si sia presentata intorno questo soggetto ; ma contuttociò mi è

sembrato conveniente di parlarne avanti delle altre combinazioni che ho immaginate, a motivo della sua maggiore semplicità, come pure per essere essa appoggiata a principj abbastanza noti sulla rifrazione, e dispersione de' colori.

La costruzione migliore di un cannocchiale prismatico esige per lo meno quattro prismi; ma perchè si concepisca il modo con cui dalla loro disposizione si forma l' acromatismo, è necessario che io dia contezza di una proprietà della luce rifratta, la quale per quanto so, non è stata da alcuno presa in considerazione.

Si è ritenuto sin quì dai Fisici che la dispersione dei colori sia costante in uno stesso mezzo refringente, ossia che a pari rifrazioni attraverso la medesima sostanza corrispondano pari dispersioni. Questa è una delle leggi fondamentali su cui si appoggiano le teorie de' più celebri Matematici sui cannocchiali acromatici, e dalla quale si è giudicato impossibile di torcere la luce per rifrazione senza decomporla, usando in qualunque modo di una sola sostanza trasparente. Io però ho trovato che la dispersione prodotta da più di una rifrazione non è altrimenti costante, ma varia secondo le varie inclinazioni del raggio incidente sulla faccia di un prisma.

Un raggio di luce può cadere ed uscire da un prisma facendo angoli eguali sulle faccie del medesimo. In tal situazione si sa che la rifrazione totale è un *minimum*, e che tutt' altro raggio incidente inclinato rispetto al precedente più verso il tagliente del prisma o più verso la base, soffre una maggior deviazione. Ora una serie di esperimenti che ho instituiti mi dimostra la non conosciuta proprietà, che se il raggio incidente piega verso il tagliente (*a*) di un pris-

---

(*a*) L' inclinazione verso il tagliente o verso la base, quando non si avverta in contrario, è sempre riferita al raggio che soffrirebbe la minima deviazione attraversando un prisma.

ma, la dispersione è maggiore di quella che si ottiene girando lo stesso prisma per avere la medesima rifrazione totale, ma col raggio incidente piegato verso la base.

Ciò poi che sembra più singolare si è, che il raggio uscito da un primo prisma acquista tal modificazione da cambiare in un modo affatto opposto la proprietà indicata. Poichè succede che ricevendosi in un secondo prisma il raggio uscito dal primo, la dispersione de' colori è più grande quando il raggio incidente sia piegato verso la base del secondo prisma, e riesce men grande in parità di rifrazione se il raggio incidente pieghi verso il tagliente.

Questa nuova legge intorno la diversa rifrangibilità de' raggi colorati può con altri termini essere annunziata così.

In eguali deviazioni dello spettro prodotte da disuguali deviazioni de' raggi sulle due faccie d'un prisma, gli spazj colorati sono maggiori quando è più grande la deviazione sulla faccia posteriore in confronto dell' anteriore, e ciò soltanto nel caso in cui il raggio incidente non abbia sofferto prima alcuna rifrazione. Che se il raggio incidente è stato prima rifratto da un prisma, allora in eguali deviazioni dello spettro prodotte da disuguali deviazioni sulle due faccie dell'ultimo prisma gli spazj colorati sono minori, quando è più grande la deviazione sulla faccia posteriore in confronto dell' anteriore.

Tutto ciò è il risultato de' seguenti esperimenti che possono essere facilmente ripetuti da chiunque possegga una serie di ben lavorati prismi.

Esperimento I. Un prisma di Crownglass d'Inghilterra di 20° 6′ posto verso l'oggetto col raggio incidente egualmente inclinato dell'emergente sui piani di rifrazione, viene corretto dai colori con un prisma di vetro da specchj di Francia di 6° 15′ posto verso l'occhio, quando il raggio incidente in esso si trova inclinato verso la di lui base: la rifrazione attraverso i due prismi è zero, ossia i due prismi danno rifrazioni uguali. L'oggetto reso acromatico si vede contratto.

II. Gli stessi prismi. Raggio incidente nel primo inclinato verso la sua base è corretto cadendo nel secondo più inclinato verso la base di questo.

La rifrazione è maggiore nel primo prisma. L' oggetto è contratto.

III. Gli stessi prismi cambiati di posto, cioè messo verso l' oggetto quello che stava prima presso l' occhio. Raggio incidente inclinato verso il tagliente del primo prisma è corretto cadendo nel secondo prisma con incidenza eguale all' emergenza.

La rifrazione totale è nulla. L' oggetto si vede dilatato.

IV. Gli stessi prismi. Raggio incidente ancor più inclinato verso il tagliente del primo è corretto incontrando il secondo con maggior inclinazione verso il suo tagliente.

La rifrazione è maggiore nel secondo prisma. L' oggetto è dilatato.

V. Un prisma di vetro bianco di Venezia di 28° 12′ collocato verso l' oggetto con un prisma di Crownglass d' Inghilterra di 20° 6′ posto verso l' occhio tolgono i colori, quando l' incidenza eguaglia l' emergenza nel prisma di vetro di Venezia, e che il raggio incidente nel secondo prisma pieghi verso la sua base. La rifrazione rimane allora maggiore nel primo prisma, e l' oggetto è contratto.

I colori possono anche distruggersi lasciando immobile il primo prisma, e ruotando il secondo in modo che il raggio in esso incidente pieghi verso il tagliente. In questo caso la rifrazione è maggiore nell' ultimo prisma, e l' oggetto si vede dilatato.

Invertendo i prismi si ha correzione, tanto cadendo il raggio nel primo prisma inclinato verso la base, come anche cadendo inclinato verso il tagliente, purchè nel secondo prisma l' incidenza eguagli l' emergenza. Nel primo caso la rifrazione è maggiore nel prisma verso l' oggetto che si vede contratto. Nel secondo caso la rifrazione è maggiore nel prisma verso l' occhio per cui l' oggetto rimane dilatato.

VI. Prisma di vetro di Venezia di 28° 12′ con prisma di vetro da specchj di Francia di 10° 42′; il primo essendo verso l' oggetto con incidenza eguale all' emergenza, viene corretto dal secondo cadendo in esso il raggio inclinato verso la base. L' oggetto rimane contratto, e la rifrazione più grande è nel primo prisma.

VII. Un prisma di Crownglass d' Inghilterra di 20° 6′ con uno pure di Crownglass d' Inghilterra di 10° 42′; il primo essendo dalla parte dell' oggetto col raggio incidente egualmente inclinato dell' emergente si correggono in due maniere cioè, o col rendere il raggio incidente nel secondo prisma inclinato verso la base, oppure col far che sia piegato verso il tagliente. Nel primo caso la rifrazione è maggiore nel prisma esterno, e l' oggetto è ristretto. Nel secondo caso la rifrazione è più grande nel prisma interno, e l' oggetto si vede dilatato.

VIII. Un prisma di Flintglass di 10° 18′ con un prisma di Crownglass di Francia di 10° 42′ si correggono quando il primo, trovandosi dalla parte dell' oggetto, con incidenza eguale all' emergenza si riceve sul secondo prisma il raggio inclinato verso la sua base, oppure inclinato verso il suo vertice. In queste due correzioni diverse le rifrazioni sono sempre maggiori nel secondo prisma di vetro; ma di queste rifrazioni è più grande quella che si ottiene quando il raggio incidente piega verso il tagliente.

Nella prima correzione l' oggetto è contratto; nella seconda è dilatato.

IX. Un prisma di Flintglass di 44° 16′ si corregge con altro di Flintglass di 24° 12′ dando il primo la sua rifrazione minima, e piegando il raggio incidente verso la base del secondo prisma prossimo all' occhio. La rifrazione è maggiore nel primo prisma, e l' oggetto rimane contratto.

X. In due prismi eguali della stessa sostanza qualunque, il raggio incidente inclinato verso la base del primo si corregge incontrando il secondo con incidenza pure verso la

base di questo. La rifrazione è maggiore nel primo prisma. L' oggetto è contratto.

Restando il primo prisma immobile come sopra, se si inclini il secondo in modo di produrre la stessa rifrazione, ma col raggio incidente in esso inclinato verso il di lui tagliente, la dispersione di questo secondo prisma diventa minore.

XI. Con gli stessi prismi uguali e di eguale sostanza, il raggio incidente inclinato verso il tagliente del primo prisma si corregge nel secondo, quando il raggio in esso incidente inclina pure verso il di lui tagliente; l' oggetto è dilatato, e la rifrazione è maggiore nel secondo prisma.

Restando immobile il primo prisma e piegando il secondo affinchè il raggio in esso incidente inclini verso la sua base, a pari rifrazioni nelle due diverse posizioni la di lui dispersione è maggiore.

XII. Prismi come sopra. Raggio incidente inclinato come l' emergente nel primo prisma non si corregge col secondo volendosi rifrazione da qualunque parte.

XIII. In due prismi eguali sempre della stessa sostanza, ad incidenze eguali dalla parte de' taglienti de' medesimi il raggio sorte colorato e la dispersione è maggiore nel prisma verso l' oggetto il quale è dilatato.

XIV. In due prismi eguali di egual vetro ad incidenze uguali dalla parte delle basi de' medesimi, il raggio sorte colorato, e la dispersione è maggiore nel secondo prisma cioè quello verso l' occhio.

L' oggetto è contratto.

Da questi esperimenti or ben si può comprendere come con una sola coppia di prismi di sostanze diverse, oppure della stessa sostanza si ottenga e dilatazione dell' immagine di un oggetto, e acromatismo insieme.

Se si uniscono ad angolo due prismi eguali e dello stesso vetro, in modo che il tagliente dell' uno corrisponda alla base dell' altro come si vede nella fig. 1., questi ruotati convenientemente intorno all' asse comune A mostreranno, all'os-

servatore che guarda in M, l' oggetto O portato in P, ed ivi dilatato e reso acromatico in conformità dell' esperimento XI

Prendendo ora un altra coppia di prismi uguali ai precedenti ed egualmente uniti, se si disporranno dietro i primi in croce, cioè in maniera da produrre la dilatazione dell' immagine nel senso normale alla prima, si avrà dall' aggregato di questi quattro prismi l' amplificazione senza colori dell' oggetto osservato.

Da quì si ravvisa che la presente costruzione è assai più vantaggiosa di quella che dissi effettuarsi con tre soli prismi. Imperocchè nella prima maniera la dilatazione, ossia ingrandimento dell' immagine per un sol verso, si ottiene da un unico prisma nel quale la rifrazione si fa maggiore nella faccia posteriore; ma nella seconda maniera l' ingrandimento lineare risulta dalla somma delle dilatazioni di due prismi, in entrambi i quali la deviazione de' raggi si fa maggiore nella faccia posteriore.

La variazione poi dell' ingrandimento in questo genere di cannocchiali dipende dalla variazione dell' angolo RAS il quale quanto è più piccolo tanto minore ingrandimento produce.

Fino dal 1815. io ho fatto costruire cannocchiali di questa specie con prismi di grandi e di piccoli angoli, da' quali tutti ho ottenuto un ottimo effetto. Uno di questi lungo meno di un pollice e largo mezzo pollice eseguito con prismetti di vetro di Francia di 45° ha tanta distinzione, o precisione de' contorni dell' immagine, che supera in forza i più perfetti cannocchiali da Teatro acromatici.

Anche con sei prismi si può formare l' istrumento guadagnando in potere amplificante sopra il cannocchiale a quattro prismi. L' artifizio per ingrandire anche in questo è analogo al precedente. Non occorrono che due sistemi di prismi uguali che dilatino, e rendino acromatici gli oggetti. La disposizione di uno di questi due sistemi è rappresentata nella fig. 2. I due primi prismi GHF, EDF assieme uniti sotto un angolo conveniente EFG debbono ruotarsi intorno l' asse F

finchè l' oggetto O attraverso i due prismi si veda in Q ove prevalga la rifrazione, e la dispersione del prisma EDF. Quindi col terzo prisma ABC con incidenza verso il tagliente si corregga la dispersione medesima, e per mezzo ai tre prismi l'immagine Q già dilatata tornerà verso O ancor più dilatata, perchè le deviazioni de' raggi nei tre prismi sono tutte maggiori nelle loro faccie posteriori.

Otto prismi uguali ingrandiscono ancora di più. Il loro ingrandimento lineare corrisponde al quadrato dell' ingrandimento lineare di un cannocchiale a quattro prismi. Inoltre hanno la particolarità di mostrare l' oggetto amplificato nel suo posto reale. Nella fig. 3. si vede uno dei due sistemi uguali composto di quattro prismi che dilata l' oggetto O senza spostarlo. I due primi prismi A, B sono assieme combinati come quelli della fig. 1. e nella stessa guisa sono riuniti gli altri due C, D, ma colla differenza che questi ultimi sono rivolti in senso opposto, per modo che se dall' una coppia si ottiene trasporto dell' oggetto da sinistra a destra, dall' altra coppia il cambiamento si fa da destra a sinistra.

Ma coll' accrescere di troppo il numero de' prismi si perde in chiarezza ed in campo ciò, che si acquista in forza amplificante, onde non è da confidarsi che con questo artificio si possa giugnere ad un considerabile ingrandimento. A tal uopo sarebbe necessario di formare delle lenti acromatiche la costruzione delle quali però si mostra possibile, poichè con una sola sostanza refringente io ho potuto formare de' prismi perfettamente acromatici. Ma siccome per ognuno di questi occorrono quattro prismi semplici, così in corrispondenza per una lente obbiettiva acromatica si esigerebbero quattro lenti del medesimo vetro.

La composizione di questi nuovi prismi acromatici non riescirà malagevole a comprendersi dopo tuttociò che fin ora è stato esposto; anzi la sola figura 4. basterà a darne una chiara idea. In essa si vedono due prismi uguali A, B, uniti assieme come si avvertì nella fig. 1. i quali spostando l'im-

magine dell' oggetto O la portano in P dilatata per l' esperimento XI. Gli altri due prismi C, D uniti fra loro nella stessa guisa de' precedenti, ma rovesciati rapporto alla posizione dell' occhio, deviano l' immagine P ancora di più dipingendola contratta nel posto Q, e ciò per l' esperimento X. Ora siccome la dilatazione risulta eguale alla contrazione per l' uguaglianza de' prismi e delle loro inclinazioni, l' oggetto veduto in Q riesce della sua dimensione naturale.

Combinati con questo principio quattro prismi di vetro di Francia di 45°, ho potuto spostare l' immagine dell' oggetto più di 25°, e lo stesso ottenni con quattro prismi di Flintglass di 10° 42'. Nonostante questa gran deviazione l' immagine si è conservata così nitida, che a riserva della diminuzione della luce niuna differenza si è trovata tra l' oggetto diretto, e l' oggetto rifratto veduto anche col mezzo di un buon cannocchiale. Tanta correzione di colori, e tanta perfezione d'immagine non si ottiene combinando nella maniera comune prismi di Flintglass e Crownglass.

Il celebre Dottor Brewster nel suo eccellente trattato di nuovi istrumenti Fisici accenna ( pag. 400 ) d' aver fatti alcuni tentativi per escludere i colori in un obbiettivo composto di due lenti della stessa sostanza, ma le sue prove non furono coronate di buon successo.

La costruzione dell' obbiettivo intrapresa da questo valente osservatore era appoggiata ad alcuni suoi esperimenti analogi al mio IX° fatti con prismi di Flintglass, e di cristallo di rocca da' quali ottenne rifrazioni senza colori. Io dubito però fortemente che due sole lenti non bastino a formare un buon obbiettivo acromatico, e ciò per gli errori di sfericità che si introducono. Forse per questa ragione non avvi da sperar molto nemmeno coll' unirne quattro assieme, poichè un calcolo abbozzato su questo soggetto non mi ha somministrato sino ad ora vantaggiosi risultati. Ma di queste ricerche mi riserbo di parlarne in altra occasione.

Per altro non mi dispenserò presentemente di far osser-

vare, che quantunque la trovata variabilità della dispersione in uno stesso mezzo refringente possa da prima sembrare un fenomeno particolare indipendente dalla legge conosciuta sulla produzione de' colori in un prisma, pure ella è una conseguenza immediata della teoria della rifrazione; e non per altro titolo è stata questa variazione da me chiamata nuova proprietà della luce, se non perchè essa non fu avvertita prima da altri. Ma per vedere come colla scorta della teoria si possa rendere ragione de' risultati degli esperimenti che ho esposti, e specialmente come si scopra che a rifrazioni eguali in un prisma debbano nascere dispersioni disuguali, secondo che il raggio incidente piega verso la base, o verso il tagliente, basterà semplicemente calcolare queste dispersioni nelle due circostanze diverse; e a tal oggetto supponiamo che in un prisma ABC di vetro fig. 5. cada normalmente al piano AB un raggio di luce bianca DE. Questo nell' incontrar la faccia CB sotto l' angolo d' incidenza FED p. e. di 30° si rifrangerà uscendo nell' aria in ER ed EV, ove la ER segna la direzione de' raggi rossi meno rifrangibili, ed EV la direzione de' più rifrangibili ossia de' violetti. Quindi l' angolo VER sarà l' angolo di dispersione che bisogna determinare. Pertanto avendosi dal vetro nell' aria il rapporto de' seni d' incidenza e di rifrazione pei raggi rossi eguale 50 : 77 e pei raggi violetti eguale 50 : 78, risulterà

$$\text{sen. } 30^\circ : \text{sen. REH} :: 50 : 77$$
$$\text{e sen. } 30^\circ : \text{sen. VEH} :: 50 : 78.$$

$$\text{da cui si ha} \begin{cases} \text{sen. REH} = \frac{77 . \text{sen. } 30^\circ}{50} \\ \text{sen. VEH} = \frac{78 . \text{sen. } 30^\circ}{50} \end{cases}$$

e per conseguenza REH=50° 22′. e VEH=51° 16′.

Dunque l' angolo di dispersione VER= VEH−REH riescirà eguale a 54′.

Supponiamo adesso nella stessa figura che un raggio RE di luce bianca cada sulla faccia CB del prisma col preceden-

te angolo d' incidenza REH. Nel rifrangersi questo raggio egli si decomporrà in raggi rossi, che evidentemente prenderanno la direzione ED, ed in raggi violetti che si piegheranno in EL. Or questi giunti al piano AB coll' incidenza ELG usciranno formando l' angolo di rifrazione QLM, il quale rappresenterà ancora l' angolo di dispersione.

Frattanto essendo l' angolo REH = 50° 22′ si avrà

sen. 50° 22′ : sen. FEL : : 78 : 50.

onde sen. FEL = $\frac{50.\text{sen. } 50° 22'}{78}$ ed FEL = 29° 35′.

Perciò LED = FED — FEL = 30° — 29° 35′ = 25′

Ma per essere MG parallela ad ED sarà l' angolo ELG = LED = 25′ dunque sen. 25′ : sen. QLM : : 50 : 78, donde si ricava sen. QLM = $\frac{78 \text{ sen. } 25'}{50}$. e QLM = 39′.

Ora dal paragone di quest' angolo QLM di dispersione coll' altro VER se ne ravvisa la grande differenza di 15′, da cui riesce sensibile che attraverso un prisma, ed in pari rifrazioni, i colori debbano essere più forti quando il raggio incidente pieghi verso il tagliente, e meno forti quando il raggio incidente pieghi verso la base. Se il calcolo si fosse istituito sopra un prisma di Flintglass, la differenza delle dispersioni si sarebbe trovata ancora più considerabile. Volendosi però in un modo più generale riconoscere questa variazione di dispersione prodotta dalle diverse incidenze, basta considerare che chiamato Δ l' angolo sotto cui i raggi rosso, e violetto sono inclinati l' uno all' altro uscendo da un prisma di angolo A, e fatta $m : 1$ la ragione della rifrazione de' raggi di mezzana refrangibilità ; $m + dm : 1$ il rapporto di rifrazione de' raggi violetti ed $m - dm : 1$ il rapporto di rifrazione de' raggi rossi, si avrà $\Delta = \frac{2dm \text{sen.} A}{\cos. r \cos. r'}$ ove $r$ esprime l' angolo di rifrazione de' raggi medj nella prima superficie del prisma, ossia di quella verso l' oggetto ed $r'$ l' angolo di rifrazione de' raggi medj nella seconda superficie.

La dimostrazione di quest' interessante teorema si può rinvenire nelle ricerche sopra diversi punti concernenti l'Analisi Infinitesimale del Pad. D. Gregorio Fontana Pavia 1793.

Ora se si chiama $i$ l'angolo d' incidenza prima, che ha prodotto la rifrazione $r$ si avrà

$$\text{sen.}\, i : \text{sen.}\, r :: m : 1$$

$$\text{e sen.}\, r = \frac{\text{sen.}\, i}{m}$$

ma $\cos. r = \sqrt{(1 - \overline{\text{sen.}}^2 r)}$; dunque sostituendo si ha

$$\cos. r = \sqrt{1 - \frac{\overline{\text{sen.}}^2 i}{m^2}} \text{ e poichè anche}$$

$$\cos. r' = \sqrt{1 - \overline{\text{sen.}}^2 r'} \text{ ne verrà}$$

$$\Delta = \frac{2dm\,\text{sen. A}}{\sqrt{\left(1 - \frac{\overline{\text{sen.}}^2 i}{m^2}\right)}\sqrt{\left(1 - \overline{\text{sen.}}^2 r'\right)}}$$

$$= \frac{2mdm\,\text{sen. A}}{\sqrt{(m^2 - \overline{\text{sen.}}^2 i)(1 - \overline{\text{sen.}}^2 r')}}.$$

Frattanto la rifrazione totale attraverso un prisma non cambia se l' incidenza prima $i$ si trasforma nella rifrazione seconda $r'$ e viceversa; imperocchè, come è noto, la rifrazione totale ossia la deviazione uguaglia $i + r' - A$; ma col fare questa inversione nel caso in cui $i$ non eguaglia $r'$, la dispersione $\Delta$ non rimane costante: essa varia come chiaramente si scopre dalla formola $\Delta = \frac{2mdm\,\text{sen. A}}{\sqrt{(m^2 - \overline{\text{sen.}}^2 i)(1 - \overline{\text{sen.}}^2 r')}}$: e poichè $m$ ed in conseguenza $m^2$ supera l' unità, il prodotto $(m^2 - \text{sen.}^2 i)(1 - \text{sen.}^2 r')$ sarà più grande allorchè $i$ sarà maggiore di $r'$. Dalla qual circostanza il valore di $\Delta$ riescirà più piccolo del valore che acquisterebbe supponendosi $i < r'$. Laonde se si riflette, che l'ipotesi di $i > r'$ val quanto dire il raggio incidente sia piegato verso la base del prisma, e l' ipotesi di $i < r'$ val quanto dire il raggio incidente sia piegato verso il tagliente, si ravviserà da questa dimostrazione generale la verità del principio che è stato stabilito intorno alla variabilità della dispersione, allorchè la luce soffre più di una rifrazione.

Ma venendo a considerare l' andamento della luce rifratta per mezzo di due prismi, noi supporremo un raggio IS fig. 6. di luce bianca normale alla faccia DE, di un prisma DEF e condotta la PQ perpendicolare ad FE indicheremo con SR la direzione de' raggi rossi refratti, e con SV la direzione de' raggi violetti. Prendendo un secondo prisma BAC della stessa sostanza del precedente, e coll'angolo A = E si disponga in modo che il raggio rosso SR incontri perpendicolarmente il piano AB: egli è chiaro che giunto esso raggio alla faccia AC coll' incidenza SRY = PSI si rifrangerà in RK parallelo alla direzione primiera IS, poichè tutto l' angolo ISR deve uguagliare l'alterno SRK. Non così succederà dell' altro raggio violetto SV poichè incontrando obbliquamente il piano AB, si piegherà in OV accostandosi alla perpendicolare MN; e quindi nell' uscire dall'altra faccia AC si rifrangerà in VT allontanandosi dalla perpendicolare LZ. Resta ora a vedersi quale inclinazione abbia il raggio VT rispetto all'altro RK dopo d' aver subite le deviazioni indicate. Egli è dal paragone delle direzioni di questi raggi rossi, e violetti che si riconoscerà nel caso presente, in cui la rifrazione totale de' due prismi è zero, se rimanga o no dispersione di colori.

Per facilitare questo confronto sia l'angolo PSI=SRY=$i$; $m - dm$ : 1 il rapporto del seno d' incidenza al seno di rifrazione de' raggi rossi; $m+dm$:1 il rapporto medesimo pei raggi violetti, l'angolo QSR = XRK = $r$ e l'angolo QSV = $v$. Di quì si avrà sen.$i$ : sen.$r$ :: 1 : $m - dm$, ossia

(I) $$\text{sen.}\, r = (m - dm)\,\text{sen.}\, i.$$

Chiamato quindi $\Delta$ l' angolo MOS = OSR e $\Delta'$ l' angolo VON, si otterà sen.$\Delta$ : sen$\Delta'$ :: $m + dm$:1 e per essere $\Delta$ un angolo piccolissimo sarà ancora $\Delta : \Delta' :: m + dm : 1$ da cui si ricava $\Delta' = \frac{\Delta}{m+dm}$.

Ora fatto OVZ=$i'$ ed LVT = $v'$ avremo $i' = i - \Delta' = i - \frac{\Delta}{m+dm}$ ed inoltre sen. $\left(i - \frac{\Delta}{m+dm}\right)$ : sen.$v'$ :: 1 : $m+dm$. donde si ha

(II) $$\text{sen.}\, v' = (m+dm)\,\text{sen.}\left(i - \frac{\Delta}{m+dm}\right).$$

Frattanto calcolando colle formole (I) (II) gli angoli $r$ e $v'$ ossia XRK ed LVT si trova sempre il primo maggior del secondo. Laonde i raggi violetti non uscendo paralleli ai rossi ma piuttosto ad essi inclinati, vi sarà dispersione senza che esista deviazione dell' immagine del punto luminoso veduto col mezzo di raggi rossi. E siccome il raggio violetto VT piega più verso il tagliente A del raggio rosso RK, la dispersione rimarrà in favore del prisma DEF rivolto verso l' oggetto, il che si accorda perfettamente coll' esperimento XIII.

Per darne un esempio sia l'angolo $i = 30°$ ed i due prismi siano di Flintglass. Siccome per questo cristallo si ha $m = 1{,}580$ $dm = 0{,}015$, ne verrà sen. $r = 1{,}565$ sen. $30°$, ed $r = 51°29'$. D'altronde avendosi sen. $i$ : sen. $v$ :: $1 : m+dm$ ossia sen. $v = (m+dm)$ sen. $i$ $= 1{,}595$ sen. $30°$, se ne dedurrà $v = 52°.\ 54'$ onde

$v - r = \Delta = 1°.\ 25'$, e però $\text{sen.}\, v' = 1{,}595$ sen. $\left(30° - \frac{1°25'}{1{,}595}\right)$

che somministra $v' = 50°.\ 54'$.

L' angolo dunque di dispersione $r - v'$ dopo il passaggio attraverso i due prismi che non spostano l' oggetto sarà di $35'$.

Se il prisma ABC si immagini ruotare intorno il suo asse finchè il piano AB riesca parallelo ad FE, è agevole il riconoscere che in tal situazione i raggi RS ed SV sortiranno dal piano AC paralleli fra loro ed al raggio IS. Quivi adunque sarà nulla la rifrazione totale e nulla la dispersione. Osservando poi che in questo caso il fascio di luce incidente sul piano AB del secondo prisma, piega verso la base di lui, e nel caso contemplato precedentemente il fascio medesimo piegava verso il tagliente, se ne può inferire l'accordo della teoria coll' osservazione nel provare, che la dispersione in un secondo prisma è più grande quando il raggio in esso incidente piega verso la base, di quello che lo sia quando il raggio incidente piega verso il tagliente. Ma per convincersi maggiormente di questa verità basta considerare, che trattandosi di

un prisma solo si è in un modo generale dimostrato essere più grande la sua dispersione, allorquando il raggio incidente bianco piega verso il tagliente. Or questa posizione corrisponde sempre a quella del raggio emergente inclinato verso la base. Per il principio adunque di reciprocità se un raggio di luce decomposto in virtù della rifrazione di un prisma viene ad incontrare un secondo prisma al primo contrapposto, avrà esso raggio in senso contrario disperso, e lo sarà maggiormente se incontra la prima faccia del secondo prisma con inclinazione verso la base del medesimo, piuttosto che con obbliquità verso il tagliente.

Egli è ora manifesto che la comune teoria de' colori poteva con singolar facilità dimostrare che per la rifrazione acromatica non si esige assolutamente più di una sostanza refringente. Ma sebbene questa teoria sia stata coltivata da tanti sommi Matematici ed Ottici dai tempi di Newton fino al presente, pure la proprietà che ho indicata rimaneva tuttora non solo ignota, ma si giudicava impossibile, se in alcuni esperimenti che io intrapresi per altro oggetto non mi si fosse scoperta.

Potrem dunque registrare anche questa tra quelle luminose prove che in fatto di fisica l' esperienza ben di sovente, e forse il più delle volte non si lascia precedere dalla teorica per disvelare le circostanze tutte che accompagnano un dato fenomeno.

SOPRA IL MOVIMENTO DI UN PUNTO MATERIALE ATTRATTO DA DUE CENTRI FISSI, L'UNO DI QUESTI ESSENDO SUPPOSTO INFINITAMENTE LONTANO

# MEMORIA

DEL SIGNOR

GIOVANNI PLANA ASTRONOMO

*Ricevuta adì* 21. *Novembre* 1820.

I. Questo caso particolare del problema generale risguardante il movimento di un punto attratto da due centri fissi, li quali agiscano in ragione inversa del quadrato della distanza, fu già da Lagrange trattato nel Tomo IV. delle antiche memorie dell'Accademia di Torino ( vedi p. 210 ). Ma alcune leggieri imperfezioni che trovansi nella soluzione che ne venne data da Lagrange, e le quali si renderanno palesi per l'analisi che segue, fanno vedere come fosse cosa importante di intraprendere una nuova soluzione di tal quistione.

Noi quì supponghiamo che abbiasi sotto gli occhj il secondo volume della Meccanica analitica, nel quale raccolte trovansi le formole generali, che a risolvere questo problema richieggonsi.

Prima d'ogni altra cosa troppo importa di far avvertire un errore di calcolo, che all'Autore è sfuggito nelle formole della pagina 113, il quale, siccome egli è evidente, nel formare l'equazione designata per $(d)$, ha dimenticato il termine $-Ch^3$, che dee far parte del secondo membro di quella; il qual termine convien perciò aggiungere ne' secondi membri delle equazioni $(e)$, non meno che sotto i radicali delle equazioni $(f)$, $(g)$, $(h)$. È palese inoltre, essere stato omesso

il fattore $h^2$ nel secondo membro dell' ultima equazione della pagina 111, per rendere esatta la qual legger dovrassi:

$$\frac{r^2\cos.^2\psi\, d\phi^2}{dt^2} = \frac{4B^2h^2}{4h^2r^2-(r^2+h^2-q^2)^2}$$

dal che ne segue che in tutte le formole delle pagine 112, e 113 sarà d'uopo cangiare $B^2$ in $B^2h^2$.

Possiamo far osservare che questi medesimi errori trovansi ancora nella prima edizione della Meccanica analitica, quantunque essi non siano nella memoria originale di Lagrange pubblicata nel Tomo IV disopra citato, in cui l'Autore ha designato per una sola costante quello che viene espresso da una funzione di tre costanti arbitrarie nella Meccanica analitica.

Nè ometter deesi, che queste correzioni fanno sì, che si debbano eziandio rettificare due altre formole riferite alle pagine 117. e 118. Difatti, facendo $s=u=h$, le equazioni $(e)$ dell'articolo 81. danno $-B^2h^2=0$, e non già $B^2=Ch^2$; quindi in luogo del polinomio in $s$ della pag. 118. avremo il seguente:

$$Hs^4+\alpha s^3+Cs^2-\alpha sh^2-Hh^4-Ch^2.$$

Ora si ha $C=-\alpha h-2Hh^2$; dunque per la sostituzione del valore di C, avremo:

$$H(s^4-2s^2h^2+h^4)+\alpha(s^3-s^2h-h^2s+h^3)=H(s^2-h^2)^2+\alpha(s-h)(s^2-h^2)$$

il quale risultato si accorda con quello dell' Autore: accordo che nasce, siccome è evidente, dall'aver Lagrange distrutto l' errore dell' equazione $B^2=Ch^2$ collo scrivere $-Ch^2$ in luogo di $-B^2$ nel polinomio in $s$; con che viene a restituirsi il termine $-Ch^2$, che era stato da lui tralasciato nelle formole della pagina 113.

II. Ciò posto, facciasi per più semplicità:

$$E=-Hh^4-Ch^2-B^2h^2;$$

$$Q=Hs^4+(\alpha+p)s^3+Cs^2-h^2(\alpha+p)s+E;$$

$$Q'=Hu^4+(\alpha-p)u^3+Cu^2-h^2(\alpha-p)u+E;$$

e sarà

$$\frac{ds}{\sqrt{Q}}=\frac{du}{\sqrt{Q'}}$$

l' equazione differenziale dell' orbita.

Suppongasi primieramente grandissima la distanza $h$ de' due centri di azione, e cerchiamo in tale ipotesi il primo termine della soluzione. Ella è cosa evidente, che in questo primo termine consisterà la soluzione esatta del caso, in cui suppongasi $h = s$.

Secondo una formola della pagina 111. noi abbiamo:

$$q = h\left(1 - \frac{2r\,\mathrm{sen}.\psi}{h} + \frac{r^2}{h^2}\right)^{\frac{1}{2}} = h\left(1 - \frac{r\,\mathrm{sen}.\psi}{h} + \mathrm{ec.}\right);$$

ma $z = r\,\mathrm{sen}.\,\psi$: dunque trascurando i termini divisi per $h$, avremo semplicemente $q = h - z$. Sostituendo questo valore nelle equazioni $s = r + q$, $u = r - q$, e facendo per brevità $x' = r + z$; $y' = r - z$, avremo:

$$s = y' + h\,; \qquad u = x' - h\,.$$

$$\frac{dy'}{\sqrt{\mathrm{Q}}} = \frac{dx'}{\sqrt{\mathrm{Q}'}} \quad \text{dove si ha:}$$

$$\mathrm{Q} = \mathrm{H}(y'+h)^4 + (\alpha+p)\,(y'+h)^3 + \mathrm{C}(y'+h)^2 - h^2(\alpha+p)(y'+h) + \mathrm{E};$$

$$\mathrm{Q}' = \mathrm{H}(x'-h)^4 + (\alpha-p)\,(x'-h)^3 + \mathrm{C}(x'-h)^2 - h^2(\alpha-p)(x'-h) + \mathrm{E}.$$

III. Per determinare le costanti arbitrarie, supponghiamo che siano

$$x = a'\,,\ y = a''\,,\ z = a'''$$

le coordinate del punto all'origine del movimento, e sia $v$ la velocità d'impulsione a questo istante, secondo una direzione, la quale faccia cogli assi delle coordinate gli angoli $\varepsilon'$, $\varepsilon''$, $\varepsilon'''$, cosicchè sia

$$\frac{dx}{dt} = v\cos.\varepsilon',\ \frac{dy}{dt} = v\cos.\varepsilon'',\ \frac{dz}{dt} = v\cos.\varepsilon'''.$$

Siccome poi si ha $r dr = x dx + y dy + z dz$; se faremo $g = \sqrt{a'^2 + a''^2 + a'''^2}$, avremo, quando $t = 0$,

$$\frac{dr}{dt} = \frac{v}{g}\left(a'\cos.\varepsilon' + a''\cos.\varepsilon'' + a'''\cos.\varepsilon'''\right) = m,$$

chiamando, per maggior semplicità $m$ il valore iniziale di $\frac{dr}{dt}$. Se si denota per $f$ il valor iniziale di $q$, l'equazione $q = h - z$, dà $f = h - a'''$. La medesima equazione $q = h - z$ dà $\frac{dq}{dt} = -\frac{dz}{dt}$; chiamando adunque $n$ il valore iniziale di $\frac{dq}{dt}$

avremo per l' istante, in cui $t = 0$, $\frac{dq}{dt} = n = -v\cos.\varepsilon'''$; ed è manifesto, che al medesimo istante sarà: $s = h + k$, $u = -h + k'$, facendo $k = g - a'''$; $k' = g + a'''$.

Ora se si faccia $m + n = m'$, $m - n = m''$, è chiaro, che le equazioni $(e)$ della pagina 113. danno il seguente doppio valore per la costante arbitraria E:

$$E = \frac{m'^2}{16}\left[(k+h)^2-(k'-h)^2\right]^2-H(k+h)^4-(\alpha+p)(k+h)^3-C(k+h)^2 + h^2(\alpha+p)(k+h);$$

$$E = \frac{m''^2}{16}\left[(k+h)^2-(k'-h)^2\right]^2-H(k'-h)^4-(\alpha-p)(k'-h)^3-C(k'-h)^2 + h^2(\alpha-p)(k'-h).$$

Facendo $t = 0$ nell' equazione $(b)$ della pagina 112. si trova:

$$C = -2H(g^2+f^2) - \frac{\alpha}{2g}(3g^2+f^2-h^2) - \frac{p}{2f}(3f^2+g^2-h^2) + gfmn.$$

L' equazione della forza viva posta alla pagina 109. dà

$$H = \frac{v^2}{4} - \frac{\alpha}{2g} - \frac{p}{2f}.$$

IV. Sostituendo la prima espressione di E nel polinomio Q e la seconda in Q', avremo:

$$Q = H\left[(y'+h)^4-(k+h)^4\right] + (\alpha+p)\left[(y'+h)^3-(k+h)^3\right] + C\left[(y'+h)^2-(k+h)^2\right] - h^2(\alpha+p)(y'-k) + \frac{m'^2}{16}\left[(k+h)^2-(k'-h)^2\right]^2;$$

$$Q' = H\left[(x'-h)^4-(k'-h)^4\right] + (\alpha-p)\left[(x'-h)^3-(k'-h)^3\right] + C\left[(x'-h)^2-(k'-h)^2\right] - h^2(\alpha-p)(x'-k') + \frac{m''^2}{16}\left[(k+h)^2-(k'-h)^2\right]^2.$$

Quindi sostituendo per C il suo valore e facendo per brevità:

$$M = \frac{m'^2}{16}\left[(k+h)^2-(k'-h)^2\right]^2 + gmn(h-a''')\left[(y'+h)^2-(k+h)^2\right],$$

si otterrà:

$$Q = M + H\left[(y'+h)^4-(k+h)^4-2(g^2+f^2)\left[(y'+h)^2-(k+h)^2\right]\right] + \alpha\left[(y'+h)^3-(k+h)^3-h^2(y'-k)-\frac{1}{2g}(3g^2+f^2-h^2)\left[(y'+h)^2-(k+h)^2\right]\right] +$$

$$+p\Big[(y'+h)^3-(k+h)^3-h^2(y'-k)-\tfrac{1}{2f}(3f^2+g^2-h^2)[(y'+h)^2-(k+h)^2]\Big].$$

Se da questa espressione si elimini H, e si faccia $p'=\frac{p}{f^2}$, otterrassi un risultato di questa forma:

$$Q = M + \tfrac{v^2}{4} N + \alpha R + p' R',$$

nel quale si è fatto:

$$N = (y'+h)^4-(k+h)^4-2[g^2+(h-a''')^2][(y'+h)^2-(k+h)^2]$$

$$R=-\tfrac{1}{2g} N+(y'+h)^3-(k+h)^3-h^2(y'-k)-\tfrac{(3g^2-h^2)}{2g}[(y'+h)^2-(k+h)^2]$$
$$-\tfrac{(h-a''')^2}{2g}[(y'+h)^2-(k+h)^2],$$

$$R'=-\tfrac{fN}{2}-\tfrac{f}{2}(3f^2+g^2-h^2)[(y'+h)^2-(k+h)^2]$$
$$+f^2[(y'+h)^3-(k+h)^3-h^2(y'-k)].$$

Prima d' andar più oltre noi osserveremo doversi riguardare come finita la quantità $p'=\frac{p}{f^2}$, quantunque $f$ sia infinita; imperciocchè l' attrazione $p$, la quale supponesi aver luogo all' unità di distanza vuolsi riguardare come infinita, se si voglia che questo centro d' azione esercitar possa una forza finita e costante alla distanza infinita, che per $f$ viene designata.

Del rimanente chiara cosa è doversi avere questo caso come identico con quello di una forza costante $p'$, la quale agirebbe sempre secondo una medesima direzione parallela all' asse delle coordinate $z$.

V. Sviluppando il valore di N, ed ordinando il risultato per rapporto alle potenze di $h$, si troverà:

$$N = o\,h^4 + o\,h^3 + A'h^2 + A''h + A''',$$

ove si è fatto per brevità:

$$A' = 4(y'^2-k^2)+8a'''(y'-k);$$
$$A'' = 4(y'^3-k^3)+4a'''(y'^2-k^2)-4(g^2+a'''^2)(y'-k);$$
$$A''' = (y'^4-k^4)-2(g^2+a'''^2)(y'^2-k^2)$$

Ordinando parimente per rapporto alle potenze di $h$ la parte della espressione di R, la quale vien dopo il termine

$-\frac{N}{2g}$, si troverà essere eguale $a$

$$oh^3 + B'h^2 + B''h + B''':$$

facendo:

$$B' = 2(1 + \frac{a'''}{g})(y' - k);$$

$$B'' = (3 + \frac{a'''}{g})(y'^2 - k^2) - (3g + \frac{a'''^2}{g})(y' - k);$$

$$B''' = (y'^3 - k^3) - \frac{1}{2}(3g + \frac{a'''^2}{g})(y'^2 - k^2).$$

Quindi ne segue, che avremo:

$$R = -\frac{N}{2g} + B'h^2 + B''h + B'''.$$

Se adesso facciamo:

$$C' = B' - \frac{A'}{2g};\ C'' = B'' - \frac{A''}{2g};\ C''' = B''' - \frac{A''}{2g},$$

avremo: $R = C'h^2 + C''h + C'''$, e

$$C' = -\frac{2}{g}(y'^2 - k^2) + 2(1 - \frac{a'''}{g})(y' - k);$$

$$C'' = -\frac{2}{g}(y'^3 - k^3) + (3 - \frac{a'''}{g})(y'^2 - k^2) - (g - \frac{a'''^2}{g})(y' - k);$$

$$C''' = -\frac{1}{2g}(y'^4 - k^4) + (y'^3 - k^3) - \frac{1}{2}(g - \frac{a'''^2}{g})(y'^2 - k^2).$$

VI. Sviluppiamo di presente l'espressione di R'. Siccome si ha:

$$3f^2 + g^2 - h^2 = 2h^2 - 6h.a''' + g^2 + 3a'''^2$$

si troverà in primo luogo:

$$R' = -\frac{fN}{2}$$

$$-\frac{f}{2}\left[\begin{array}{l}4h^3(y' - k) + h^2[2(y'^2 - k^2) - 12.a'''(y' - k)] \\ +h[-6a'''(y'^2 - k^2) + 2(g^2 + 3a'''^2)(y' - k)] + (g^2 + 3a'''^2)(y'^2 - k^2)\end{array}\right]$$

$$+\frac{f}{2}\left[\begin{array}{l}4h^3(y' - k) + h^2[6(y'^2 - k^2) - 4a'''(y' - k)] \\ +h[2(y'^3 - k^3) - 6a'''(y'^2 - k^2)] - 2a'''(y'^3 - k^3)\end{array}\right]$$

ovvero, riducendo:

$$R' = -\frac{fN}{2} + \frac{fn}{2}\left[\begin{matrix} O.h^3 + A'h^2 + h[2(y'^3 - k^3) - 2(g^2 + 3a'''^2)(y' - k)] \\ -2a'''(y'^3 - k^3) - (g^2 + 3a'''^2)(y'^2 - k^2) \end{matrix}\right]$$

e sostituendo per N il suo valore, si avrà:

$$R' = \frac{f}{2}\left[\begin{matrix} h[-2(y'^3 - k^3) - 4a'''(y'^2 - k^2) + 2(g^2 - a'''^2)(y' - k)] \\ -(y'^4 - k^4) - 2a'''(y'^3 - k^3) + (g^2 - a'''^2)(y'^2 - k^2) \end{matrix}\right]$$

e restituendo $h - a'''$ in luogo di $f$, si otterrà:

$$R' = D'h^2 + D''h + D''',$$

facendo per maggior semplicità:

$$D' = -(y'^3 - k^3) - 2a'''(y'^2 - k^2) + (g^2 - a'''^2)(y' - k);$$

$$D'' = -\frac{1}{2}(y'^4 - k^4) + \frac{1}{2}(g^2 + 3a'''^2)(y'^2 - k^2) - a'''(g^2 - a'''^2)(y' - k);$$

$$D''' = \frac{a'''}{2}(y'^4 - k^4) + a'''^2(y'^3 - k^3) - \frac{a'''}{2}(g^2 - a'''^2)(y'^2 - k^2).$$

Per dare alla funzione M la medesima forma, noi faremo:

$$E' = 2gmn(y' - k);$$

$$E'' = gmn[(y'^2 - k^2) - 2a'''(y' - k)] + \frac{m'^2}{8}(k + k');$$

$$E''' = -gmna'''(y'^2 - k^2) + \frac{m'^2}{16}(k^2 - k'^2);$$

ed avremo:

$$M = E'h^2 + E''h + E'''.$$

VII. Raccogliendo ora le varie parti, avremo

$$Q = G'h^2 + G''h + G''';$$

essendo:

$$G' = E' + \frac{1}{4}v^2A' + \alpha C' + p'D';$$

$$G'' = E'' + \frac{1}{4}v^2A'' + \alpha C'' + p'D'';$$

$$G''' = E''' + \frac{1}{4}v^2A''' + \alpha C''' + p'D'''.$$

Sostituendo nell' espressione di G' i valori precedenti di E', A', C', D', si troverà, che ponendo per semplificare:

$$p'' = v^2 - \frac{2\alpha}{g} - 2p'a''',$$

$$p''' = 2gmn + 2v^2a''' + \frac{2\alpha}{g}(g - a''') + p'(g^2 - a'''^2),$$

si ha:

$$G' = -p'(y'^3 - k^3) + p''(y'^2 - k^2) + p'''(y' - k).$$

Questa espressione è visibilmente divisibile per $y' - k$; se dunque faremo:

$$\beta' = p'' - p'k\,;\ \beta'' = p''' + p''k - p'k^2,$$

avremo:

$$G' = (y' - k)(-p'y'^2 + \beta' y' + \beta'').$$

VIII. Passiamo ora ad occuparci della espressione di Q'. Ponendo:

$$M' = \frac{m'''^2}{16}\,[(k+h)^2 - (k'-h)^2] + gmn(h - a''')[(x'-h)^2 - (k'-h)^2],$$

e facendo

$$Q' = M' + \tfrac{1}{4}\,v^2 N' + \alpha R_{\text{I}} - p' R'_{\text{I}}$$

è facile il vedere, che è:

$$R'_{\text{I}} = \frac{fN'}{2} + \frac{f}{2}(3f^2 + g^2 - h^2)[(x'-h)^2 - (k'-h)^2]$$
$$+ f^2[(x'-h)^3 - (k'-h)^3 - h^2(x'-k')]\,;$$

e che per avere i valori di N' e $R_{\text{I}}$, basta cangiare nelle espressioni corrispondenti di N, R $y'$ in $x'$, $h$ in $-h$, $k$ in $k'$, e $a'''$ in $-a'''$, cosicchè facendo:

$$N' = A'_{\text{I}}\,h^2 - A''_{\text{I}}\,h + A'''_{\text{I}},$$
$$R_{\text{I}} = C'_{\text{I}}\,h^2 - C''_{\text{I}}\,h + C'''_{\text{I}};$$

si avrà:

$$A'_{\text{I}} = 4(x'^2 - k'^2) - 8a'''(x' - k'),$$

$$A''_{\text{I}} = 4(x'^3 - k'^3) - 4a'''(x'^2 - k'^2) - 4(g^2 + a'''^2)(x' - k'),$$

$$A'''_{\text{I}} = (x'^4 - k'^4) - 2(g^2 + a'''^2)(x'^2 - k'^2),$$

$$C'_{\text{I}} = -\frac{2}{g}(x'^2 - k'^2) + 2\left(1 + \frac{a'''}{g}\right)(x' - k'),$$

$$C''_{\text{I}} = -\frac{2}{g}(x'^3 - k'^3) + \left(3 + \frac{a'''}{g}\right)(x'^2 - k'^2) - \left(g - \frac{a'''^2}{g}\right)(x' - k');$$

$$C'''_{\text{I}} = -\frac{1}{2g}(x'^4 - k'^4) + (x'^3 - k'^3) - \frac{1}{2}\left(g - \frac{a'''^2}{g}\right)(x'^2 - k'^2).$$

Inutile forse non sarà l'avvertire, essersi cangiato $a'''$ in $-a'''$

per distrarre il cangiamento di segno, che avrebbe subito il secondo termine del valore di $f^2 = h^2 - 2ha''' + a'''^2$, scrivendo $-h$ per $h$ il quale secondo termine non dee congiar di segno nel passare da Q a Q'.

È ora palese, che si ha:

$$R'_1 = \frac{fN'}{2} + \frac{f}{2}\left[\begin{matrix} -4h^3(x'-k') + h^2[2(x'^2-k'^2) + 12.a'''(x'-k')] \\ -h[6a'''(x'^2-k'^2) + 2(g^2+3a'''^2)(x'-k')] + (g^2+3a'''^2)(x'^2-k'^2) \end{matrix}\right]$$

$$+ \frac{f}{2}\left[\begin{matrix} 4h^3(x'-k') + h^2[-6(x'^2-k'^2) - 4a'''(x'-k')] \\ +h[2(x'^3-k'^3) + 6a'''(x'^2-k'^2)] - 2a'''(x'^3-k'^3) \end{matrix}\right].$$

Avremo adunque dopo le riduzioni:

$$R'_1 = \frac{f}{2}\left[\begin{matrix} oh^3 + oh^2 + h[-A''_1 + 2(x'^3-k'^3) - 2(g^2+3a'''^2)(x'-k')] \\ +A'''_1 - 2a'''(x'^3-k'^3) + (g^2+3a'''^2)(x'^2-k'^2) \end{matrix}\right]$$

e sostituendo $h - a'''$ in luogo di $f$ troveremo:

$$R'_1 = D'_1 h^2 - D''_1 h + D'''_1$$

dove

$$D'_1 = -\frac{1}{2}A''_1 + (x'^3-k'^3) - (g^2+3a'''^2)(x'-k');$$

$$D''_1 = -\frac{1}{2}A'''_1 - \frac{a'''A''_1}{2} + 2a'''(x'^3-k'^3) - \frac{1}{2}(g^2+3a'''^2)(x'^2-k'^2) - a'''(g^2+3a'''^2)(x'-k');$$

$$D'''_1 = -\frac{a'''A'''_1}{2} + a'''^2(x'^3-k'^3) - \frac{a'''}{2}(g^2+3a'''^2)(x'^2-k'^2)$$

ovvero:

$$D'_1 = -(x'^3-k'^3) + 2a'''(x'^2-k'^2) + (g^2-a'''^2)(x'-k'),$$

$$D''_1 = -\frac{1}{2}(x'^4-k'^4) + \frac{1}{2}(g^2+3a'''^2)(x'^2-k'^2) + a'''(g^2-a'''^2)(x'-k');$$

$$D'''_1 = -\frac{a'''}{2}(x'^4-k'^4) + a'''^2(x'^3-k'^3) + \frac{a'''}{2}(g^2-a'''^2)(x'^2-k'^2).$$

Ben si può vedere, che questi valori nascono dai loro corrispondenti D', D'', D''' per mezzo di que' cangiamenti stessi, che sonosi fatti per ottenere $A_1'$, $A_1''$, ec. Ma siccome ciò non è del tutto evidente, abbiamo perciò scelto di farne il calcolo diretto. Ponendo.

$$E'_{1} = -2gmn(x'-k'),$$

$$E''_{1} = gmn.[(x'^{2}-k'^{2})+2a'''(x'-k')]+\frac{m''^{2}}{8}(k+k');$$

$$E'''_{1} = -gmna'''(x'^{2}-k'^{2})+\frac{m''^{2}}{16}(k^{2}-k'^{2});$$

si avrà:

$$M' = E'_{1}h^{2} + E''_{1}h + E'''_{1}.$$

IX. Riunendo insieme le varie parti, avremo.

$$Q' = F'h^{2} + F''h + F''',$$

dove si fa:

$$F' = E'_{1} + \frac{1}{4}v^{2}A'_{1} + \alpha C'_{1} - p'D'_{1};$$

$$F'' = E''_{1} - \frac{1}{4}v^{2}A''_{1} - \alpha C''_{1} + p'D''_{1};$$

$$F''' = E'''_{1} + \frac{1}{4}v^{2}A'''_{1} + \alpha C'''_{1} - p'D'''_{1}.$$

Sostituendo in F' in luogo di $E'_{1}$, A', ec. i loro valori, si troverà:

$$F' = p'(x'^{3}-k'^{3})+p''(x'^{2}-k'^{2})-p'^{v}(x'-k');$$

facendo

$$p'^{v} = 2gmn + 2v^{2}a''' - \frac{2\alpha}{g}(g+a''') + p'(g^{2}-a'''^{2}).$$

Essendo questa epressione di F' divisibile per $x'-k'$, abbiamo:

$$F' = (x'-k')(p'x'^{2} + \beta'_{1}x' + \beta''_{1})$$

essendo

$$\beta'_{1} = p'k' + p''; \quad \beta''_{1} = p'k'^{2} + p''k' - p'^{v}.$$

X. Dietro ai risultati precedenti, l'equazione differenziale dell'orbita diviene:

$$\frac{dy'}{\sqrt{G'h^{2}+G''h+G'''}} = \frac{dx'}{\sqrt{F'h^{2}+F''h+F'''}}.$$

È quindi chiaro, che se si suppone $h=\infty$, questa equazione si riduce a

$$\frac{dy'}{\sqrt{G'}} = \frac{dx'}{\sqrt{F'}}.$$

Secondo l'equazione (g) della pag. 113. si ha:

$$dt = \frac{\left(h+2y'+\frac{y'^2}{h}\right)dy'}{4\sqrt{G'+\frac{G''}{h}+\frac{G'''}{h^2}}} - \frac{\left(h-2x'+\frac{x'^2}{h}\right)dx'}{4\sqrt{F'+\frac{F''}{h}+\frac{F'''}{h^2}}}.$$

La quale espressione, supposta $h=\infty$, si riduce primieramente a:

$$dt = \frac{(h+2y')dy'}{4\sqrt{G'}} - \frac{(h-2x')dx'}{4\sqrt{F'}}$$

dove $x'=r+z$, $y'=r-z$. Ma essendo sempre il raggio vettore $r$ maggiore dell' ordinata $z$; $dy'$, $dx'$ sono quantità del medesimo segno, e debbesi perciò considerare come nulla la differenza $\frac{hdy'}{4\sqrt{G'}} - \frac{hdx'}{4\sqrt{F'}}$ di due quantità infinite; e questa considerazione riduce l' espressione di $dt$ alla seguente:

$$dt = \frac{y'dy'}{2\sqrt{G'}} + \frac{x'dx'}{2\sqrt{F'}}.$$

Rimane or dunque soltanto che si formi l' equazione, per cui si determini l'angolo $\varphi$. Per ottenerla, osservisi, che facendo $y'=0$ nella espressione di Q riferita alla fine del N.° II., si ottiene $Q = -B^2h^2$. Chiamando adunque $G'_0$, $G''_0$, $G'''_0$ ciò che divengono $G'$, $G''$, $G'''$, facendo in esse $y'=0$, avremo:

$$-B^2h^2 = G'_0h^2 + G''_0h + G'''_0$$

e per la sostituzione di questo valore nell'equazione $(h)$ della pagina 113. si avrà:

$$d\varphi = \frac{h\sqrt{-G'_0h^2-G''_0h-G'''_0}dy'}{(2hy'+y'^2)\sqrt{G'h^2+G''h+G'''}} + \frac{h\sqrt{-G'_0h^2-G''_0h-G'''_0}dx'}{(2x'h-x'^2)\sqrt{F'h^2+F''h+F'''}}.$$

Se suppongasi adesso $h=\infty$, questa equazione si riduce manifestamente a:

$$d\varphi = \frac{\sqrt{-G'_0}dy'}{2y'\sqrt{G'}} + \frac{\sqrt{-G'_0}dx'}{2x'\sqrt{F'}},$$

dove si ha per le formole precedenti:

$$G'_0 = p'k^3 - p''k^2 - p'''k.$$

Degno è di osservazione, che se si faccia $x'=0$ nell' espressione di Q' posta al N.° II. si ha $Q' = -B^2h^2$. Designando

adunque per $F'_o$, $F''_o$, $F'''_o$ i valori che prendono le quantità F', F'', F''' quando vi si fa $x' = o$, avremo,

$$-B^2h^2 = F'_o h^2 + F''_o h + F'''_o,$$

onde ne segue, che

$$G'_o h^2 + G''_o h + G'''_o = F'_o h^2 + F''_o h + F'''_o,$$

ovvero

$$G'_o + \frac{G''_o}{h} + \frac{G'''_o}{h^2} = F'_o + \frac{F''_o}{h} + \frac{F'''_o}{h^2}.$$

Dunque facendo $h = \infty$, si ha $G'_o = F'_o$.

Conchiudiamo adunque, che se per maggior semplicità si ponga:

$$\Sigma = p'k^3 - p''k^2 - p'''k,$$

si potrà dare alle espressioni di G', F' la forma seguente:

$$G' = -p'y'^3 + p''y'^2 + p'''y' + \Sigma;$$

$$F' = p'x'^3 + p''x'^2 - p'''x' + \Sigma.$$

Raccogliendo le equazioni, le quali contengono la soluzione del caso, che noi abbiam preso a considerare, si avrà:

$$(1) \qquad \frac{dy'}{\sqrt{G'}} = \frac{dx'}{\sqrt{F'}};$$

$$(2) \qquad dt = \frac{y'dy'}{2\sqrt{G'}} + \frac{x'dx'}{2\sqrt{F'}};$$

$$(3) \qquad d\varphi = \frac{dy'\sqrt{-\Sigma}}{2y'\sqrt{G'}} + \frac{dx'\sqrt{-\Sigma}}{2x'\sqrt{F'}}.$$

XI. Chi leggerà l' articolo XIV. della Memoria di Lagrange inserita nel Tomo IV. delle antiche memorie dell'Accademia di Torino, vedrà, come egli abbia tenuto un'altra via per ridurre le formole generali in modo conveniente da esser addattate a questo caso particolare. Nel paragonare gli ultimi suoi risultati con quelli, che noi abbiamo or or trovato, noi ci maravigliammo di vedere, che quelli erano da' nostri essenzialmente diversi. E dopo un attento esame ci accorgemmo, esserne cagione una innavvertenza commessa da questo grande Geometra. Ecco in che essa consista.

Secondo le denominazioni dell' Autore ( vedi p. 212. 213. ), si ha;

$$C\,p^4 + M p^3 + D p^2 - M f^2 p + E =$$
$$(P+f)^4(\gamma+\gamma' f)+(P+f)^3(\mu+\mu' f+\mu'' f^2)+(P+f)^2(\delta+\delta' f+\delta'' f^2)$$
$$-f^2(P+f)(\mu+\mu' f+\mu'' f^2)+\varepsilon+\varepsilon' f+\varepsilon'' f^2+\varepsilon''' f^3+\varepsilon^{iv} f^4+\varepsilon^{v} f^5;$$

$$C\,q^4 + N q^3 + D q^2 - N f^2 q + E =$$
$$(Q-f)^4(\gamma+\gamma' f)+(Q-f)^3(\nu+\nu' f+\nu'' f^2)+(Q-f)^2(\delta+\delta' f+\delta'' f^2),$$
$$-f^2(Q-f)(\nu+\nu' f+\nu'' f^2)+\varepsilon+\varepsilon' f+\varepsilon'' f^2+\varepsilon''' f^3+\varepsilon^{iv} f^4+\varepsilon^{v} f^5.$$

Lagrange, dopo d' avere sviluppato la prima di queste due equazioni, dice, che basta per avere il corrispondente risultato dato dalla seconda, scrivere $-f$ in luogo di $f$, e Q in vece di P, $\nu$ per $\mu$, $\nu'$ per $\mu'$, $\nu''$ per $\mu''$. Ora non è chi non vegga che non è permesso il solo cangiamento di $f$ in $-f$, poichè i termini $\gamma' f$, $\nu' f$, $\delta' f$, $\varepsilon' f$, $\varepsilon''' f^3$, $\varepsilon^{v} f^5$ conservano il medesimo segno in ambedue le equazioni. Converrà adunque per non commetter l'errore in cui si cadrebbe coll' operare in siffatta maniera, dopo avere scritto $-f$ in luogo di $f$, cangiar inoltre il segno delle lettere $\gamma'$, $\nu'$, $\delta'$, $\varepsilon'$, $\varepsilon'''$, $\varepsilon^{v}$. Così operando si troverà, che li coefficienti di $f^5, f^4, f^3$ sono ancora identicamente nulli nel polinomio in $q$, cosa che non avverrebbe, se i soli cangiamenti da Lagrange indicati si facessero. Fatta questa correzione, si troverà, che i polinomj di terzo grado in Q e P si accordano con quelli, che furono da noi designati per F' e G'.

La via che noi seguita abbiamo per giungere alle espressioni di G', F', ha questo vantaggio, ch' essa ci dà questi polinomj decomposti in due fattori; e ciò molto più facile rende la riduzione di queste formole differenziali alle trascendenti ellittiche.

XII. Facciasi per brevità:

$$p = \beta' + \sqrt{\beta'^2 + 4p'\beta''}; \quad p' = -\beta'_1 + \sqrt{\beta'^2_1 - 4p'\beta''_1}$$
$$q = \beta' - \sqrt{\beta'^2 + 4p'\beta''}; \quad q' = -\beta'_1 - \sqrt{\beta'^2_1 - 4p'\beta''_1}$$

e si avrà:

$$\frac{dy'}{\sqrt{G'}} = \frac{2\sqrt{p'}.dy'}{\sqrt{y'-k}\sqrt{(p-2p'y')(2p'y'-q)}}:$$

$$\frac{dx'}{\sqrt{F'}} = \frac{2\sqrt{p'}.dx'}{\sqrt{x'-k'}\sqrt{(2p'x'-p')(2p'x'-q')}}.$$

Se ora faremo:

$$\sqrt{y'-k} = \tfrac{1}{2}\,y''; \qquad \sqrt{x'-k'} = \tfrac{1}{2}\,x''.$$

onde

$$y' = k + \tfrac{1}{4}\,y''^2; \qquad x' = k' + \tfrac{1}{4}\,x''^2:$$

troveremo:

$$\frac{dy'}{\sqrt{G'}} = \frac{2\sqrt{p'}.dy''}{\sqrt{\left(\theta - \frac{p'}{2}\,y''^2\right)\left(\frac{p'}{2}\,y''^2+\theta'\right)}}$$

$$\frac{dx'}{\sqrt{F'}} = \frac{2\sqrt{p'}.dx''}{\sqrt{\left(\frac{p'}{2}\,x''^2+i\right)\left(\frac{p'}{2}\,x''^2+i'\right)}}$$

ponendo; per semplificare:

$$\theta = p - 2p'k; \qquad i = 2p'k' - p';$$
$$\theta' = 2p'k - q; \qquad i' = 2p'k' - q'.$$

Ciò posto, le equazioni riferite alla fine del N.° X. si cangieranno nelle seguenti:

$$(1)' \qquad \frac{dy''}{\sqrt{\left(\theta - \frac{p'}{2}\,y''^2\right)\left(\frac{p'}{2}\,y''^2+\theta'\right)}} = \frac{dx''}{\sqrt{\left(\frac{p'}{2}\,x''^2+i\right)\left(\frac{p'}{2}\,x''^2+i'\right)}}$$

$$(2)' \quad dt = \frac{\sqrt{p'}\left(k+\frac{1}{4}y''^2\right)dy''}{\sqrt{\left(\theta-\frac{p'}{2}\,y''^2\right)\left(\frac{p'}{2}\,y''+\theta'\right)}} + \frac{\sqrt{p'}\left(k'+\frac{1}{4}\,x''^2\right)dx''}{\sqrt{\left(\frac{p'}{2}\,x''^2+i\right)\left(\frac{p'}{2}\,x''^2+i'\right)}}$$

$$(3)' \quad d\phi = \frac{\sqrt{-p'\Sigma}\,dy''}{\left(k+\frac{1}{4}\,y''^2\right)\sqrt{\left(\theta-\frac{p'}{2}\,y''^2\right)\left(\frac{p'}{2}\,y''^2+\theta'\right)}}$$

$$+ \frac{\sqrt{-p'\Sigma}.dx''}{\left(k'+\frac{1}{4}\,x''^2\right)\sqrt{\left(\frac{p'}{2}\,x''^2+i\right)\left(\frac{p'}{2}\,x''^2+i'\right)}}$$

Agevol cosa è ora il ridurre queste formole alla forma delle

trascendenti ellittiche comuni. Trovansi nel primo volume degli esercizj di Calcolo integrale del Sig. Legendre ( vedi p. 10, 11, 12 ) le trasformazioni che per questa riduzione si richieggono.

XIII. Se si suppone, che all' origine del movimento il punto sia posto sull' asse delle $z$, avremo $g = a'''$, e quindi $k = g - a''' = 0$: Ma noi abbiamo:

$$\Sigma = p'k^3 - p''k^2 - p'''k;$$

avremo dunque anche $\Sigma = 0$, onde l' equazione (3) dà $d\phi = 0$. Sarà dunque l' angolo $\phi$ costante per tutta la durata del movimento, e perciò piana sarà la curva del punto descritto. Trovasi in questo caso una soluzione particolare dell' equazione $\frac{dy'}{\sqrt{G'}} = \frac{dx'}{\sqrt{F'}}$, col prendere $y' = \varepsilon$, cosicchè sia $\varepsilon$ una radice semplice dell' equazione $G' = 0$. Ognun vede, che l'equazione $y' = r - z = \varepsilon$ appartiene ad una parabola, giacchè prendendo il piano delle $(x, z)$ per quello della curva si può fare $r = \sqrt{x^2 + z^2}$.

XIV. Non crediamo non dover terminare questa Memoria senza osservare, che rimane ancora a desiderarsi una soluzione diretta di questo problema, la quale venga dedotta dalle equazioni differenziali del secondo ordine, che a quello appartengono. Queste equazioni, se si consideri per maggior semplicità il caso dell' orbita piana, sono della forma seguente:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{Ax}{r^3} + B = 0.$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{Ay}{r^3} = 0.$$

nelle quali $r^2 = x^2 + y^2$. Quantunque molto semplici esse pajano, gravi difficoltà s' incontrano tuttavia, quando altri intraprenda di dedurre da quelle immediatamente li risultati, che col metodo precedente noi abbiamo ottenuti.

Se fingasi che la forza costante B venga decomposta in due forze uguali, l'una diretta verso il centro della forza A, l' altra diretta verso un altro centro fisso, che sia dal primo

lontana di una distanza arbitraria $h$ presa sopra l'asse delle $x$, egli è facile di ridurre la quistione al caso di due forze dirette verso due centri fissi, col fare nelle formole generali della Meccanica analitica

$$R = -2\gamma \cdot r + \frac{\alpha}{r^2}\ ; \quad Q = 2\gamma \cdot q.$$

Ma ben presto altri s'accorgerà, che questi valori di R e Q non sono tali, che si possa ottenere l'integrale corrispondente a quello, che viene designato per ($b$) alla pagina 112. Imperciocchè, eseguendo il calcolo, si troverà:

$$\frac{d.q^2 \times d.r^2}{2dt^2} - \frac{\alpha(3r^2+q^2-h^2)}{r} + \gamma h^2 (r^2 - q^2)$$
$$+ 3\gamma f(q^2 - r^2)(d.q^2 + d.r^2) = 4H(q^2 + r^2) + 2C$$

dove, la funzione di $q$, $r$ posta sotto il segno integrale, siccome è evidente, non è un differenziale esatto. Non pare adunque, che si possa con questo mezzo pervenire a separar le variabili.

Debbo poi ancora confessare, che troppo chiaro non veggo, come facendo $h = \infty$ ( seguendo le traccie di Lagrange ) si risolva difatti il caso identico con quello, che l'una delle forze sia costante, ed agisca in una direzione sempre parallela a se stessa. Perchè avendo ( N.° II. ):

$$q = h\left(1 - \frac{2r\text{sen}.\psi}{h} + \frac{r^2}{h^2}\right)^{\frac{1}{2}} = h - r\text{sen}.\psi + \frac{1}{2}\frac{r^2}{h} - \frac{1}{2}\frac{r^2\text{sen}.^2\psi}{h} + \text{ec.}$$

ossia

$$q = h - r\text{sen}.\psi + \frac{r^2\cos.^2\psi}{2h} + \text{ec.}$$

non si può supporre $q = h - r\text{sen}.\psi$, quando $h = \infty$, se non col supporre tacitamente, che il raggio vettore conservi sempre una grandezza incomparabilmente minore. Ora questa seconda ipotesi non parmi aver luogo nelle equazioni:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{Ax}{r^3} + B = 0$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{Ay}{r^3} = 0.$$

Onde questo riflesso fammi credere, passare gran differenza

nel senso analitico tra il problema espresso da queste due equazioni e quello, che si è risolto addottando la supposizione fatta da Lagrange.

Queste difficoltà sono cagione, che altri debba dolersi, perchè il Signor Legendre trattato non abbia questo caso particolare nel suo bel lavoro, che sopra questo problema ha pubblicato nel secondo volume de' suoi esercizj di calcolo integrale.

SULL' EQUILIBRIO ASTRATTO DELLE VOLTE

# MEMORIA

DEL SIG. ANTONIO BORDONI

Prof. nella Università di Pavia

*Ricevuta adì* 25 *Maggio* 1821.

Molti sono quelli che parlarono dell' equilibrio astratto delle volte, fra i quali si distinguono tuttora Bossut e Mascheroni; ma nessuno ha trattato questa materia colla generalità, ed ha avuto di mira lo scopo che io spero di conseguire nella presente Memoria.

Si immaginino nell' *introdos* o superficie interna della Volta due linee della sua massima curvatura non molto lontane l'una dall' altra, e due altre analoghe della minima, le quali seghino le prime, ed esse racchiuderanno una porzione dell' *introdos* che sarà quadrilatera rettangola; indi si immaginino per queste linee le quattro superficie sviluppabili le cui caratteristiche siano altrettante normali dell' *introdos* medesimo, e si suppongano estese sino alla superficie esterna della Volta. Egli è facile il concepire, per chiunque non sia digiuno affatto di stereotomia, che il corpo racchiuso dalle due superficie della Volta e dalle quattro superficie sviluppabili immaginate, costituirà in generale un vero cuneo della Volta stessa, e che ciascuno di questi cunei generalmente sarà soggetto all' azione di cinque forze, di cui quattro saranno le pressioni esercitate su di esso dai quattro cunei suoi laterali e la quinta il suo proprio peso; e che nello stato di equilibrio della Volta queste cinque forze dovranno equilibrarsi fra loro.

Questa proprietà che deve verificarsi per le forze a cui trovasi soggetto ogni cuneo di una Volta insieme all' ipotesi comunemente ammessa che l' *introdos* sia la superficie d' equilibrio, è in generale il fondamento di quanto intendo quì di esporre relativamente all' equilibrio astratto di qualunque Volta.

Potrei cominciare immediatamente a parlare dell' equilibrio di una Volta qualunque e poscia discendere a parlare di quello delle Volte particolari, come corollarj; ma siccome con ciò sacrificherei in parte la facilità delle quistioni più importanti e d' altronde poco guadagnerei in semplicità; così credo migliore il partito di parlare primieramente dell' equilibrio delle Volte particolari e più comuni, cioè di quelle le cui superficie interne sono cilindriche, coniche, di rotazione, de' canali od annulari, o sviluppabili, le quali per questo si chiamano Volte cilindriche, coniche, di rotazione, de' canali od annulari, e sviluppabili; indi di parlare dell' equilibrio di una Volta qualsivoglia cioè qualunque sia la sua superficie interna od *introdos*.

## *Delle Volte Cilindriche.*

Per semplicità supporrò la superficie cilindrica, le linee ed i punti quì occorrenti riferiti a tre assi ortogonali, l'uno dei quali sia verticale e diretto dal basso in alto; anzi onde evitare una inutile ripetizione supporrò disposti in un modo consimile anco gli assi che occorreranno nelle altre quistioni, qualora però non faccia dichiarazioni particolari; e chiamerò costantemente asse delle $z$ quello verticale, e delle $x$, $y$ gli altri due.

La ABGH . . . (fig. 1.) esprima la superficie cilindrica interna della Volta che si ha quì di mira, le linee CL, DN due sue prossime caratteristiche, e le FMH . ., GLN . . due sue prossime sezioni piane perpendicolari alle stesse caratteristiche: per la natura delle superficie cilindriche nelle due ret-

te CL, DN si avranno due linee della minima curvatura di essa, e nelle curve FMH.., GLN.. due di quelle della massima. Per semplicità si disponga l'asse delle $x$ in modo che riesca il piano delle $x$, $z$ parallelo alle rette caratteristiche della superficie cilindrica, ciò che non limita punto la quistione, e si chiami $v$ la distanza dal punto M al piano delle $y$, $z$; $i$ l'angolo d'inclinazione di ogni caratteristica col piano delle $x, y$; $r$ quel raggio minimo di curvatura della superficie che corrisponde al punto M; $u$ l'angolo che fa il raggio $r$ medesimo col piano delle $x$, $z$; T la pressione che soffre il punto M secondo la retta CM, e $t$ quella che soffre secondo la toccante in M della linea FM; $\Delta$ la grossezza della Volta in M; in ultimo $Qdudv$ il differenziale rispetto alle variabili $u$, $v$ del peso della porzione di Volta corrispondente alle stesse ordinate $u$, $v$, ossia il peso del picciol cuneo che insiste sul quadrilatero MLNH.

Essendo $t\,\text{sen}.u\,\text{sen}.i$, $-t\,\text{cos}.u$, $-t\,\text{sen}.u\,\text{cos}.i$ le componenti della pressione $t$ secondo i prolungamenti degli assi delle $x, y, z$, il cuneo avente per peso $Qdudv$ in virtù della $t$ stessa sarà soggetto alle azioni delle forze

$$-\left(t\,\text{sen}.u\right)'\,\text{tang}.i\,dudv,\ \frac{1}{\text{cos}.i}\left(t\,\text{cos}.u\right)'\,dudv,\ \left(t\,\text{sen}.u\right)'\,dudv$$

dirette secondo i prolungamenti degli assi stessi $Ox$, $Oy$, $Oz$. Così per essere la pressione T diretta secondo la CM equivalente alle due $T\,\text{cos}.i$, $T\,\text{sen}.i$ parallele alle $Ox, Oz$, lo stesso cuneo sarà soggetto per la T anco alle azioni delle forze

$$-rT_{,}\,\text{cos}.i\,dudv, -rT_{,}\,\text{sen}.i\,dudv$$

dirette secondo i prolungamenti dei medesimi assi $Ox$, $Oz$.

Le lineette poste ad alcune quantità dove si porrebbero gli esponenti di esse, tanto quì quanto nel seguito significano le derivate rispetto alla $u$ delle stesse quantità, e gli altri cioè quelle poste al piede fignificano invece le derivate rispetto alla $v$ di quelle quantità alle quali sono messe.

Raccogliendo le cose esposte si comprende che il cuneo

avente per peso $Q dudv$ è soggetto secondo i prolungamenti degli assi $Ox$, $Oy$, $Oz$ rispettivamente alle forze

$$-\left(t \operatorname{sen}.u\right)' \operatorname{tang}.i\, dudv - rT_1 \cos.i\, dvdu,\ \frac{1}{\cos.i}\left(t\cos.u\right)' dudv,$$

$$\left(t \operatorname{sen}.u\right)' dudv - rT_1 \operatorname{sen}.i\, dudv - Q dudv;$$

e però nello stato di equilibrio dovranno sussistere le tre equazioni seguenti

$$(t \operatorname{sen}.u)' \operatorname{tang} i + rT_1 \cos.i = 0,\ (t\cos.u)' = 0,$$
$$(t \operatorname{sen}.u)' - rT_1 \operatorname{sen}.i - Q = 0.$$

Combinando la prima colla terza di queste equazioni in modo da eliminare la $T_1$, si ha la

$$t' \operatorname{sen}.u + t\cos.u - Q\cos.^2 i = 0,$$

la quale combinata colla seconda delle medesime ovvero alla equivalente

$$t'\cos u - t \operatorname{sen}.u = 0,$$

in maniera d'eliminare la $t'$, somministra

$$t = Q\cos.^2 i \cos.u.$$

Così eliminando dalla prima e terza la $(t \operatorname{sen}.u)'$ si trova

$$rT_1 + Q\operatorname{sen}.i = 0, \text{ e però } T_1 = -\frac{\operatorname{sen}.i}{r} Q.$$

Ma sostituendo nella seconda delle medesime tre equazioni o nell'anzi esposta sua equivalente in luogo delle $t$, $t'$ i loro valori

$Q\cos.^2 i\cos.u$, $(Q\cos.u)'\cos.^2 i = Q'\cos.u\cos.^2 i - Q\operatorname{sen}.u\cos.^2 i$, si trova l'equazione

$$Q'\cos.u - 2Q\operatorname{sen}.u = 0,$$

la quale dà $Q = \frac{\phi(v)}{\cos.^2 u}$: dove $\phi(v)$ esprime la funzione arbitraria della $v$ voluta dalla operazione eseguita rispetto alla $u$. Quindi, essendo $Q = \frac{\phi(v)}{\cos.^2 u}$, si avrà

$$t = \frac{\cos.^2 i}{\cos.u}\varphi(v), \text{ e } T' = -\frac{\operatorname{sen}.i}{r\cos.^2 u}\varphi(v) \text{ ossia } T = -\frac{\operatorname{sen}.i}{r\cos.^2 u}\int\varphi(v)dv + \psi(u),$$

cioè le pressioni corrispondenti, le quali hanno luogo secon-

do le linee di curvatura della superficie interna della Volta: la $\psi(u)$ indica una funzione arbitraria della $u$.

Passo ora a determinare la $\Delta$ grossezza corrispondente a qualunque punto della superficie interna della Volta stessa.

Il corollario secondo della proposizione dodicesima della Memoria sulle linee e superficie parallele inserita nel tomo sedicesimo della Società Italiana delle Scienze, somministra facilmente

$$Q = \frac{1}{2}(2r\Delta + \Delta^2)\frac{1}{\cos.i},$$

ove si supponga il peso specifico della materia componente la Volta uniforme ed espresso dalla unità; e per tanto, stante il valore della Q sopra trovato, sussisterà l' equazione

$$\Delta^2 + 2r\Delta = \frac{2\cos.i}{\cos.^2 u}\varphi(v)$$

colla quale si potrà avere la $\Delta$ grossezza cercata, quando si conoscerà la funzione $\varphi(v)$.

Per determinare questa funzione, si supponga $f(v)$ quella funzione della $v$, che rappresenta la grossezza della Volta secondo una data caratteristica della sua superficie interna, e si chiamino $m$, $n$ i valori delle $u$, $r$ corrispondenti a questa medesima caratteristica; ed evidentemente avrassi l' equazione

$$f^2(v) + 2nf(v) = \frac{2\varphi(v)}{\cos.^2 m}\cos.i, \text{ ossia}$$

$$\varphi(v) = \frac{\cos.^2 m}{2\cos.i}\left(f^2(v) + 2nf(v)\right);$$

e però l'equazione dalla quale converrà desumere la grossezza cercata sarà

$$\Delta^2 + 2r\Delta = \frac{\cos.^2 m}{\cos.^2 u}\left(f^2(v) + 2nf(v)\right).$$

Sostituendo il valore della $\varphi(v)$ quì trovato anco nelle espressioni delle $t$, T sopra esposte si ottiene

$$t = \frac{\cos.^2 m}{2\cos.u}\left(f^2(v) + 2nf(v)\right)\cos.i,$$

$$T = -\frac{\cos.^2 m \,\mathrm{tang}.i}{2r\cos.^2 u}\int\left(f^2(v)+2nf(v)\right)dv+\psi(u).$$

Per determinare in ultimo la $\psi(u)$, basterà conoscere i valori delle T, $r$, ed $u$ corrispondenti ad un dato valore della $v$ od ai punti della superficie interna della Volta appartenenti ad una data linea esistente in essa: ciò è per se evidente. Per esempio, se la Volta fosse così costituita che ad $m = 0$ corrispondesse $f(v) = a$ costante, ed alla $v = l$ costante corrispondesse $T = 0$, l'equazione dalla quale si potrebbe desumere in questo caso qualunque valore della $\Delta$ sarebbe

$$\Delta^2 + 2r\Delta = \frac{a^2+2an}{\cos^2 u};$$

ed i valori delle $t$, T si ridurrebbero a

$$\frac{\cos.i}{2\cos.u}(a^2+2an)\ ,\ (l-v)(a^2+2an)\frac{\mathrm{tang}.i}{2r\cos.^2 u}.$$

Colla equazione quì trovata in $\Delta$, data la linea della minima curvatura della superficie interna della Volta, si potrà determinare l'espressione generale della grossezza corrispondente; reciprocamente, se fosse data la grossezza si potrebbe all'uopo determinare la linea della massima curvatura della stessa superficie interna della Volta, la quale è sufficiente per individuare la superficie medesima; per esempio, se la Volta dovesse avere una grossezza costante $c$, la linea della minima curvatura della Volta cilindrica sarebbe data dalla equazione

$$c^2 + 2cr = \frac{a^2+2am}{\cos.^2 u};$$

ove l'$r$ esprime il suo raggio di curvatura, ed $u$ l'angolo compreso dal medesimo raggio e dalla retta sezione comune al piano di essa linea ed al piano delle $x$, $z$. Questa linea non è una catenaria omogenea come taluno crede.

L'equazione

$$\Delta^2 + 2r\Delta = \frac{\cos.^2 m}{\cos.^2 u}\left(f^2(v)+2nf(v)\right)$$

insegna che, in tutte le Volte per cui sono eguali fra loro le quantità analoghe alla $(f^2(v)+2nf(v))\cos.^2 m$, saranno altresì

eguali le grossezze corrispondenti a' valori eguali delle $r$, $u$.

Rappresentate colle $x$, $y$, $z$ le coordinate della superficie interna della Volta, e colle X, Y, Z le analoghe coordinate della esterna, e colla $z-hx=F(y)$ l'equazione della superficie interna della Volta stessa, ove $F(y)$ indica una funzione della $y$, e la $h$ una costante, l'equazione della superficie esterna della Volta fra le coordinate X, Y, Z sarà la risultante della eliminazione delle $x, y, z$ dalle quattro seguenti

$$z-hx=F(y),\ (X-x)^2+(Y-y)^2+(Z-z)^2-\Delta^2=0,$$

$$X-x+(Z-z)\left(\frac{dz}{dx}\right)=0,\ Y-y+(Z-z)\left(\frac{dz}{dy}\right)=0$$

dove $\Delta$ esprime quella funzione delle $x, y, z$, che si ha col porre in essa in luogo delle $v$, $u$ i loro valori formati colle $x, y, z$.

*Delle Volte Coniche.*

La superficie interna della Volta sia espressa da BGND . . ( fig. 2. ); e l'origine delle coordinate sia fissata in O vertice di essa.

Si tirino nella superficie le due linee rette OCL . . ODN . . prossime l'una all'altra, e le due curve FMH . , GLN . . anch'esse prossime fra loro, e tali che i punti di ciascuna siano equidistanti dal vertice della superficie conica medesima, e si avranno in esse due linee della minima e due della massima curvatura della medesima superficie.

Si chiami $v$ la retta OM; $u$ l'angolo che comprenderebbe la stessa OM colla individuata OBG se la superficie conica fosse distesa tutta in un piano senza piegature; $t$ la pressione che soffre lo stesso punto secondo la toccante in M della linea FM, e T quella che soffre lo stesso punto M secondo la OM; $\Delta$ la grossezza che deve avere la volta in M; $a$, $b$, $c$ i coseni degli angoli che fa la $t$ rispettivamente cogli assi delle $x, y, z$; $\alpha, \beta, \gamma$ i coseni di quelli compresi dalla T coi medesimi assi delle $x, y, z$; in fine si rappresenti, come nel-

la quistione precedente, con $Q dudv$ il peso del cuneo che insiste sul quadrilatero rettangolo MLNH.

Per essere la pressione o forza $t$ equivalente alle tre $ta$, $tb$, $tc$, e la T alle T$\alpha$, T$\beta$, T$\gamma$ dirette rispettivamente secondo i prolungamenti degli assi O$x$, O$y$, O$z$, le medesime due forze $t$, T assoggetteranno il cuneo avente per peso $Q dudv$ alle azioni delle forze

$$-(at)' dudv, -\alpha(vT)_{,} dudv, -(bt)' dudv,$$

$$-\beta(vT)_{,} dudv, -(ct)' dudv, -\gamma(vT)_{,} dudv$$

dirette, le prime due secondo il prolungamento dell'asse O$x$, le due seguenti secondo quello dell'O$y$; e le ultime secondo quello dell' O$z$; e però siccome il cuneo stesso trovasi soggetto anco alla forza $-Q dudv$ diretta secondo il prolungamento di quest' ultimo asse; così si avranno le tre seguenti equazioni

$$(at)' + \alpha(vT)_{,} = 0,$$

$$(bt)' + \beta(vT)_{,} = 0,$$

$$(ct)' + \gamma(vT)_{,} + Q = 0.$$

Moltiplicando queste quattro equazioni ordinatamente per $\alpha, \beta, \gamma$ e sommando le risultanti, ed osservando che $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1$, $a\alpha+b\beta+c\gamma=0$, si ottiene la

$$(a'\alpha + b'\beta + c'\gamma)t + (vT)_{,} + \gamma Q = 0,$$

la quale si riduce alla

$$t + (vT)_{,} + \gamma Q = 0$$

per essere $a'\alpha+b'\beta+c'\gamma = \left(\frac{du}{du}\right) = 1$. Così moltiplicando le stesse tre equazioni ordinatamente per $a$, $b$, $c$ ed unendo le risultanti si ha la semplicissima

$$t' + cQ = 0,$$

stante che $a^2 + b^2 + c^2 = 1$, $aa' + bb' + cc' = 0$; oltre di $a\alpha + b\beta + c\gamma = 0$.

Similmente combinando la prima alla seconda, e la pri-

ma alla terza delle medesime tre equazioni in modo da eliminare la quantità $(v\mathrm{T})_{,}$, si ottengono due equazioni, dalle quali eliminando la $t'$ risulta la seguente

$$[(b\gamma-c\beta)a'+(a\beta-b\alpha)b'+(a\alpha-a\gamma)c']t-\mathrm{Q}(b\alpha-a\beta)=0\,,$$

ovvero $$t\left(\frac{d\mu}{du}\right)+m\mathrm{Q}=0\,,$$

dove si intenda colla $m$ il coseno dell' angolo compreso fra l' asse delle $z$ e la normale in M della superficie, e colla $\mu$ l' angolo che dovrebbe descrivere il piano toccante la superficie conica lungo la CM per passare ad essere toccante la medesima superficie lungo la BG, senza cessare di essere toccante.

Ora sostituendo nella equazione

$$t'+c\mathrm{Q}=0$$

in luogo della $t'$ il suo valore cavato dall' ultima equazione trovata, se ne avrà un' altra in Q, Q', la quale integrata darà il valore di Q, che posto nell' equazione

$$\left(\frac{d\mu}{du}\right)t+m\mathrm{Q}=0$$

darà la $t$; ed entrambi i valori delle $t$, Q sostituiti nella

$$t+(v\mathrm{T})_{,}+\gamma\mathrm{Q}=0$$

somministreranno quello della $(v\mathrm{T})_{,}$, e però anco il valore della T.

Per trovare il valore della $\Delta$ grossezza della Volta, si eguaglierà il valore della Q trovato nel modo anzi indicato a quello della Q medesima formato colla $\Delta$, che si desume facilmente dal corollario secondo della proposizione dodicesima della Memoria sul parallelismo citata superiormente.

Non isviluppo le operazioni quì indicate, perchè ci occorrerà di svilupparne delle similissime, quando si parlerà delle Volte le cui superficie interne sono sviluppabili.

*Delle Volte di rotazione.*

Incomincierò dal parlare di quelle Volte di rotazione, che hanno l'asse orizzontale; e per semplicità supporrò l'asse delle $x$ nello stesso asse di rotazione della superficie interna della Volta.

La superficie interna della Volta sia espressa da BFMC.. (fig. 3.); due suoi prossimi meridiani dalle linee CM.. , DH.., e due prossimi paralleli dalle FM.. , GL.. ; e sia BF quel suo meridiano che è nel piano degli assi delle $x$, $z$.

Conducansi i raggi PF, PM del parallelo FM.. ; e denominisi $u$ l' angolo FPM , $\rho$ il raggio del parallelo FM.. , $s$ l'arco CM del meridiano CM.. ; $v$ l'ordinata OP, $t$ la pressione che soffre il punto M secondo la toccante in M dell' arco FM, e T quella che esso soffre secondo la toccante in M della CM; e con $Q dudv$ si esprima il peso del cuneo corrispondente al quadrilatero rettangolo MLNH.

Essendo la pressione $t$ equivalente alle due $t \cos. u$ , $- t$ sen. $u$ dirette secondo gli assi delle $Oy$, $Oz$; e la T equivalente alle tre

$$\frac{T}{s_1}, \quad \frac{T\rho_1}{s_1} \text{ sen. } u, \quad \frac{T\rho_1}{s_1} \cos. u$$

dirette rispettivamente le ultime due secondo gli assi stessi delle $y, z$, e la prima secondo quello delle $x$; il cuneo avente per peso $Q dudv$, in virtù delle pressioni $t$, T sarà soggetto secondo i prolungamenti degli assi $Ox$, $Oy$, $Oz$ rispettivamente alle azioni delle pressioni o forze

$$-\left(\frac{T\rho}{s_1}\right)_1 dvdu, -s_1(t \cos.u)' dvdu - \left(\frac{T\rho\rho_1}{s_1}\right)_1 \text{sen. } u\, dudv,$$

$$s_1(t \text{ sen.} u)' dvdu - \left(\frac{T\rho\rho_1}{s_1}\right)_1 \cos. u. dudv;$$

e per tanto nello stato di equilibrio avranno luogo le tre equazioni seguenti

$$\left(\frac{T\rho}{s_1}\right)_1 = 0 , \; s_1(t \cos. u)' + \left(\frac{T\rho\rho_1}{s_1}\right)_1 \text{sen.} u = 0 ,$$

$$s_1 (t \operatorname{sen}.u)' - \left(\frac{T\rho\rho_1}{s_1}\right)_1 \cos.u - Q = 0.$$

Stante la prima delle tre equazioni quì trovate le altre due si riducono alle

$$s_1 (t \cos.u)' + \frac{T\rho\rho_{11}}{s_1} \operatorname{sen}.u = 0 ,$$

$$s_1 (t \operatorname{sen}.u)' - \frac{T\rho\rho_{11}}{s_1} \cos.u - Q = 0,$$

dalle quali eliminando la T si ottiene la

$$s_1 t' - Q \operatorname{sen}.u = 0, \text{ ossia } t' = \frac{Q \operatorname{sen}.u}{s_1} .$$

Così eliminando la $t'$ dalle ultime due medesime equazioni, o dalle loro equivalenti

$$t' \cos.u - t \operatorname{sen}.u + \frac{T\rho\rho_{11}}{s_1^2} \operatorname{sen}.u = 0 ,$$

$$t' \operatorname{sen}.u + t \cos.u - \frac{T\rho\rho_{11}}{s_1^2} \cos.u - \frac{1}{s_1} Q = 0$$

si trova

$t - \frac{T\rho\rho_{11}}{s_1^2} - \frac{1}{s_1} Q \cos.u = 0$, la quale dà

$t = T \frac{\rho\rho_{11}}{s_1^2} + \frac{1}{s_1} Q \cos.u$; e però $t' = \frac{\rho\rho_{11}}{s_1^2} T' + \frac{\cos.u}{s_1} Q' - \frac{\operatorname{sen}.u}{s_1} Q$.

Questo valore della $t'$ posto nell'altra equazione $s_1 t' - Q \operatorname{sen}.u = 0$ ottenuta mediante la prima eliminazione anzi eseguita somministra la

$$\frac{\rho\rho_{11}}{s_1} T' + Q' \cos.u - 2Q \operatorname{sen}.u = 0$$

ovvero $Q' - 2 \operatorname{tang}.u . Q + \frac{\rho\rho_{11}}{s_1 \cos.u} T' = 0$,

colla quale si fa dipendere il valore della Q da quello della T. Ma l'equazione $\left(\frac{T\rho}{s_1}\right)_1 = 0$ dà $T = \frac{s_1}{\rho} \varphi(u)$, ove $\varphi(u)$ esprime una funzione arbitraria della $u$; adunque si avrà

$$Q' - 2 \operatorname{tang}.u . Q + \frac{\rho_{11}}{\cos.u} \varphi(u) = 0,$$

la quale integrata somministra

$$Q = \frac{1}{\cos.^2 u}\left(\psi(v) - \rho_{,,}\int \varphi(u)\cos.u\,du\right),$$

dove $\psi(v)$ esprime un' altra funzione arbitraria.

Ponendo i valori trovati delle T, Q nella espressione $\frac{T\rho\rho_{,,}}{s_{,}^2} + \frac{Q\cos.u}{s_{,}}$, che rappresenta la $t$, si avrà

$$t = \frac{\rho_{,,}}{s_{,}}\varphi(u) + \frac{1}{s_{,}\cos u}\left(\psi(v) - \rho_{,,}\int \varphi(u)\cos.u\,du\right).$$

Ora che sono determinate le pressioni $t$, T e la Q passo a determinare la $\Delta$ grossezza della Volta, cioè ad esprimerla, colle stesse quantità colle quali è formato il valore del Q sopra esposto.

Dalla proposizione tredicesima della stessa Memoria sulle parallele citata sopra, ritenuto quì pure il peso specifico della Volta costante ed espresso dalla unità, si ha

$$Q = r\left(\Delta + \frac{\Delta^2}{2r} + \frac{\Delta^2}{2R} + \frac{\Delta^3}{3rR}\right)$$

dove $r = \rho s_{,}$, ed $R = -\frac{s_{,}^3}{\rho_{,,}}$; e conseguentemente avrà luogo l' equazione seguente

$$\frac{1}{\cos.^2 u}\left(\psi(v) - \rho_{,,}\int \varphi(u)\cos.u\,du\right) = r\left(\Delta + \frac{\Delta^2}{2r} + \frac{\Delta^2}{2R} + \frac{\Delta^3}{3rR}\right)$$

ovvero

$$\Delta^3 + \frac{3}{2}(R+r)\Delta^2 + 3Rr\Delta - \frac{3R}{\cos.^2 u}\left(\psi(v) - \rho_{,,}\int \varphi(u)\cos.u\,du\right) = 0$$

colla quale si potrà determinare la $\Delta$ grossezza cercata.

La maniera più semplice ed anco più naturale per determinare le funzioni $\varphi(u)$, $\psi(v)$ in ogni caso particolare sarà quella di supporre nota quella funzione di $u$, che rappresenta la pressione T per tutta l' estensione di un parallelo della superficie interna della Volta, e quella funzione della $v$ che esprimerà la grossezza della Volta secondo un meridiano della superficie stessa: per esempio la funzione della $v$ che rappresenterà la grossezza che dovrà avere la Volta secondo il meridiano . . BG . . dorso della Volta stessa.

Dovrei ora parlare di quelle Volte di rotazione che hanno

l'asse di rotazione verticale, le quali sono le più comuni, ed anco di quelle che hanno l'asse comunque inclinato all'orizzonte; ma siccome dopo l'esposto pel caso contemplato sopra non si incontrerebbero difficoltà che di prolissità di calcolo, e d'altronde ho divisato di parlare delle prime di queste Volte coi principj delle derivate alla fine di questa Memoria, così per evitare una inutile ripetizione per lo scopo che si ha quì di mira, continuerò la presente Memoria col parlare dell'equilibrio.

*Delle Volte annulari o de' Canali.*

Si chiamano Volte annulari ordinarie ed anco de' Canali quelle le cui superficie interne si possono supporre generate da una circonferenza che nel moversi si conserva perpendicolare alla linea descritta dal suo centro.

Incomincierò a parlare di quelle Volte annulari per cui la linea percorsa dal centro della circonferenza generatrice è in un piano orizzontale, e poscia abbraccierò tutta la generalità che si può desiderare rispetto ad esse.

La ACD (fig. 4.) rappresenti la linea percorsa dal centro della circonferenza generatrice, la FEL la sua sviluppata; e la GBH circonferenza esprima la generatrice che sta sopra la retta EC toccante in E della FEL adattatesi al piano della stessa FEL col rotare intorno al suo diametro orizzontale od alla stessa toccante EC. Si tirino i raggi CB, CM il primo perpendicolare alla EC e l'altro diretto al punto M qualunque della circonferenza HBG, e la MN perpendicolare anch'essa alla HE; e si chiami $r$ il raggio della circonferenza generatrice, $s$ la porzione EN intercetta tra N ed il punto E di contatto, $v$ l'angolo che fa la NE coll'asse delle $x$, $u$ il BCM, $t$ la pressione che è sofferta dal punto M secondo la toccante in M dell'arco BM, T quella che esso soffre secondo la linea descritta dal punto M stesso, nel mentre che la circonferenza genera la superficie interna della Volta sen-

za punto rotare intorno al suo centro; e secondo il solito $Q\,du\,dv$ esprima il peso del cuneo insistente sul quadrilatero rettangolo compreso fra la circonferenza . . BM . . e la sua prossima seguente e la anzidetta linea descritta dal punto M, e l'analoga sua prossima verso il punto H, le quali per la natura della superficie interna della Volta sono quattro linee di curvatura di essa superficie, cioè due della massima curvatura e due della minima.

Decomponendo le pressioni $t$, T secondo i prolungamenti dei tre assi $Ox$, $Oy$, $Oz$, le loro componenti risultano per la prima

$$-t\cos.u\cos.v,\quad t\cos.u\,\mathrm{sen}.v,\quad -t\,\mathrm{sen}.u$$

e per la seconda $T\mathrm{sen}.v$, $T\cos.v$; e però il cuneo avente per peso $Q\,du\,dv$, per le pressioni $t$, T medesime, sarà soggetto alle forze

$$(ts\cos.u)'\cos.v\,du\,dv - r(T\mathrm{sen}.v)_{,}\,du\,dv,$$

$$-(ts\cos.u)'\mathrm{sen}.v\,du\,dv - r(T\cos.v)_{,}\,du\,dv,\ (ts\,\mathrm{sen}.u)'\,du\,dv$$

dirette rispettivamente secondo i prolungamenti degli assi $Ox$, $Oy$, $Oz$. Quindi nello stato di equilibrio della Volta avranno luogo le tre equazioni seguenti

$$(ts\cos.u)'\cos.v - r(T\mathrm{sen}.v)_{,} = 0,$$

$$(ts\cos.u)'\mathrm{sen}.v + r(T\cos.v)_{,} = 0,$$

$$(ts\,\mathrm{sen}.u)' - Q = 0.$$

Eliminando $(ts\cos.u)'$ dalle prime due di queste equazioni, si ha $T_{,} = 0$, ovvero $T = \varphi(u)$ funzione arbitraria della $u$; per cui le medesime due prime equazioni si riducono alla sola seguente

$(ts\cos.u)' - rT = 0$, ovvero $t's\cos.u + t(s\cos.u)' - rT = 0$,

la quale combinata colla terza o colla sua equivalente

$$t's\,\mathrm{sen}.u + t(s\,\mathrm{sen}.u)' - Q = 0$$

in modo da eliminare la $t'$ somministra la

$$st = Q\cos.u - r\mathrm{Tsen}.u.$$

Ma sostituendo questo valore di $st$ nella medesima equazione $(ts\cos.u)_{,} - r\mathrm{T} = 0$, si ha la

$$(\mathrm{Q}\cos.^2u)' - r(\mathrm{T}\,\mathrm{sen}.u\cos.u)' - r\mathrm{T} = 0;$$

adunque sarà

$$\mathrm{Q}\cos.^2u - r\mathrm{T}\,\mathrm{sen}.u\cos.u - r\int \mathrm{T}du = \psi(v),$$

$$\text{ossia } \mathrm{Q} = r\mathrm{T}\,\mathrm{tang}.u + \frac{\psi(v)+r\int \mathrm{T}du}{\cos.^2u},$$

dove $\psi(v)$ esprime una funzione arbitraria della $v$; e per tanto sarà anco

$$t = \frac{\psi(v)+r\int \mathrm{T}du.}{s\cos.u}.$$

Così per essere $r$ un raggio di curvatura della superficie interna della Volta espresso colla R l' altro, risulterà

$$\mathrm{Q} = \left(\Delta + \frac{\Delta^2}{2r} + \frac{\Delta^2}{2\mathrm{R}} + \frac{\Delta^3}{3r\mathrm{R}}\right) rs;$$

e conseguentemente avrassi l' equazione

$$rs\left(\Delta + \frac{\Delta^2}{2r} + \frac{\Delta^2}{2\mathrm{R}} + \frac{\Delta^3}{3r\mathrm{R}}\right) = r\mathrm{T}\,\mathrm{tang}.u + \frac{\psi(v)+r\int \mathrm{T}du}{\cos.^2u}$$

ovvero la seguente

$$\Delta^3 + \frac{3}{2}(\mathrm{R}+r)\Delta^2 + 3r\mathrm{R}\Delta - \frac{3\mathrm{R}}{s}\left(r\mathrm{T}\,\mathrm{tang}.u + \frac{\psi(v)+r\int \mathrm{T}du}{\cos.^2u}\right) = 0$$

colla quale si potrà determinare la $\Delta$ grossezza della Volta, quando si conosceranno le funzioni $\varphi(u)$, $\psi(v)$.

Per esempio, se ad $u = 0$, ed $\frac{1}{\mathrm{R}} = 0$ corrispondesse $\Delta = m$ costante e T fosse eguale a zero, si avrebbe $r\lambda\left(m + \frac{m^2}{2r}\right) = \psi(v)$ ove $\lambda$ esprime quella funzione della $v$ che rappresenta la EC raggio di curvatura della ACD; e per conseguenza l' equazione da cui desumere la grossezza $\Delta$ per un punto qualunque della Volta sarebbe in questo caso

$$\Delta^3 + \frac{3}{2}(\mathrm{R}+r)\Delta^2 + 3r\mathrm{R}\Delta - \frac{3\mathrm{R}\lambda(2r+m)m}{2s\cos.^2u} = 0;$$

dove si può osservare che la $s$ eguaglia $\lambda + r\,\mathrm{sen}.u$.

Se la linea generatrice della Volta annulare in vece di essere una circonferenza fosse una linea qualunque $amb$ ( fig. 5 ),

la quale si movesse come sopra la circonferenza, e che la linea ACD (fig. 4) fosse percorsa da un dato punto del piano di essa generatrice; e rappresentata colla *def* la sua sviluppata piana, colla *bhn* una orizzontale, colla *me* il raggio di curvatura corrispondente al punto *m* qualunque, e chiamato *r* questo raggio ossia la *me*, ed *u* l'angolo $90^\circ$ — *mhb* cioè l'angolo che fa la *me* coll'asse delle *z*, e ritenute per le altre quantità le denominazioni già usate sopra, si troverebbero facilmente per lo stato di equilibrio, le tre equazioni

$$(ts\cos.u)'\cos.v - (r\mathrm{T}\operatorname{sen}.v)_{,} = 0,$$

$$(ts\cos.v)'\operatorname{sen}.v + (r\mathrm{T}\cos.v)_{,} = 0,$$

$$(ts\operatorname{sen}.v)' - \mathrm{Q} = 0,$$

le quali danno, $\mathrm{T}_{,} = 0$, ovvero $\mathrm{T} = \varphi(u)$ funzione arbitraria d'*u* come sopra,

$$\mathrm{Q} = r\mathrm{T}\operatorname{tang}.u + \frac{\psi'v) + rf\mathrm{T}du}{\cos.^2 u}$$

ecc. ecc.

vale a dire risultamenti affatto simili a quelli trovati superiormente pe caso d'*r* costante.

Le due funzioni $\varphi(u)$, $\psi(v)$ anco in questo caso si determineranno facilmente qualora si conosceranno i valori di due delle quantità *t*, T, $\Delta$ come nel caso d'*r* costante.

Passo ora al caso che la superficie interna della Volta sia generata da una circonferenza, qualunque però sia la linea percorsa dal suo centro; e per facilità della esposizione supporrò che la periferia generatrice non roti intorno alla linea percorsa dal suo centro, ossia che tutti i punti di essa periferia descrivano altrettante linee parallele a quella percorsa dal suo centro, condizione che non limita punto la quistione.

La RSV (fig. 6) esprima la linea percorsa dal centro della circonferenza generatrice della superficie interna della Volta; le FMH.., GLN.. due porzioni di due periferie generatrici prossime fra loro; S, e T i centri delle medesime; CML.., DHN.. rappresentino le due linee parallele fra loro

descritte dai punti M, H dell' arco FMH . . ; la QPK esprima la sviluppata comune alle RSV, CML . . ; $r$ il raggio MS=HS=ecc. $\rho$ la SP intercetta fra il punto S ed il punto P di contatto fra la stessa SP e la curva QPK; $v$ l' angolo compreso fra la MS ed un altro raggio della . . FMH . . che incontra una data individuata delle linee analoghe alla CML . . a sinistra di questa medesima; $u$, $y$, $z$ le coordinate secondo gli assi $Ox$, $Oy$, $Oz$ corrispondenti al punto S centro dell' arco FMH; $y=\varphi(u)$, $z=\psi(v)$ le equazioni della linea RSV; $\mu$ l' arco . . RS., e però

$$\left(\frac{d\mu}{du}\right)=\sqrt{\left(1+\left(\frac{d\varphi}{du}\right)^2+\left(\frac{d\psi}{du}\right)^2\right)} \text{ ossia } \mu'=\sqrt{(1+\varphi'^2+\psi'^2)};$$

le $c$, $m$, $n$ i cosени degli angoli che comprende la toccante in M dell' arco FMH . . coi prolungamenti degli assi $Ox$, $Oy$, $Oz$; $t$ la pressione che soffre il punto M secondo FM, e T quella sofferta dallo stesso punto secondo CM.

Evidentemente la pressione $t$ equivale alle tre $ct$, $mt$, $nt$ dirette secondo gli assi $Ox$, $Oy$, $Oz$; e la T alle $\frac{T}{\mu'}$, $\frac{\varphi'T}{\mu'}$, $\frac{\psi'T}{\mu'}$ dirette secondo i medesimi assi; e però il cuneo appoggiato al quadrilatero MLNH, il cui peso si esprimerà come già si è fatto altrove con $Qdudv$, sarà soggetto secondo gli assi $Ox$, $Oy$, $Oz$ rispettivamente alle forze

$$-r\left(\frac{T}{\mu'}\right)'dudv-\mu'\left(tc\left(1+\frac{r}{\rho}\right)\right)_1 dudv,$$

$$-r\left(\frac{\varphi'T}{\mu'}\right)'dudv-\mu'\left(tm\left(1+\frac{r}{\rho}\right)\right)_1 dudv,$$

$$-r\left(\frac{\psi'T}{\mu'}\right)'dudv-\mu'\left(tn\left(1+\frac{r}{\rho}\right)\right)_1 dudv-Qdudv.$$

Quindi nello stato di equilibrio sussisteranno le tre equazioni

$$r\left(\frac{T}{\mu'}\right)'+\mu'\left(tc\left(1+\frac{r}{\rho}\right)\right)_1=0,$$

$$r\left(\frac{\varphi'T}{\mu'}\right)'+\mu'\left(tm\left(1+\frac{r}{\rho}\right)\right)_1=0,$$

$$r\left(\frac{\psi' T}{\mu'}\right)' + \mu'\left(tn\left(1+\frac{r}{\rho}\right)\right)_1 + Q = 0$$

ovvero le tre seguenti

$$\frac{r}{\mu'}T' + rT\left(\frac{1}{\mu'}\right)' + \mu' c\left(1+\frac{r}{\rho}\right)t_1 + t\mu'\left(c\left(1+\frac{r}{\rho}\right)\right)_1 = 0,$$

$$\frac{r\varphi'}{\mu'}T' + rT\left(\frac{\varphi'}{\mu'}\right)' + \mu' m\left(1+\frac{r}{\rho}\right)t_1 + t\mu'\left(m\left(1+\frac{r}{\rho}\right)\right)_1 = 0,$$

$$\frac{r\psi'}{\mu'}T' + rT\left(\frac{\psi'}{\mu'}\right)' + \mu' n\left(1+\frac{r}{\rho}\right)t_1 + t\mu'\left(n\left(1+\frac{r}{\rho}\right)\right)_1 + Q = 0.$$

Moltiplicando queste tre equazioni rispettivamente per $\frac{1}{\mu'}$, $\frac{\varphi'}{\mu'}$, $\frac{\psi'}{\mu'}$, ed osservando che hanno luogo le condizioni espresse dalle equazioni

$$\left(\frac{1}{\mu'}\right)^2 + \left(\frac{\varphi'}{\mu'}\right)^2 + \left(\frac{\psi'}{\mu'}\right)^2 = 1,\quad \frac{1}{\mu'}\left(\frac{1}{\mu'}\right)' + \frac{\varphi'}{\mu'}\left(\frac{\varphi'}{\mu'}\right)' + \frac{\psi'}{\mu'}\left(\frac{\psi'}{\mu'}\right)' = 0,$$

$$\frac{c}{\mu'} + \frac{m\varphi'}{\mu'} + \frac{n\psi'}{\mu'} = 0,\quad \frac{c_1}{\mu'} + \frac{\varphi' m_1}{\mu'} + \frac{\psi' n_1}{\mu'} = 0,$$

si ottiene la

$$rT' + Q\frac{\psi'}{\mu'} = 0.$$

Così moltiplicandole ordinatamente per $c$, $m$, $n$ e sommando quì pure le risultanti, ed osservando che oltre le condizioni dianzi esposte hanno luogo anco le

$$c^2 + m^2 + n^2 = 1,\quad cc_1 + mm_1 + nn_1 = 0,$$

si trova la equazione

$$\mu'\left(t\left(1+\frac{r}{\rho}\right)\right)_1 + rT\left(c\left(\frac{1}{\mu'}\right)' + m\left(\frac{\varphi'}{\mu'}\right)' + n\left(\frac{\psi'}{\mu'}\right)'\right) + nQ = 0.$$

Le due equazioni quì trovate danno i valori di $rT'$, $\mu'\left(t\left(1+\frac{r}{\rho}\right)\right)_1$ i quali sostituiti nella terza delle suddette tre equazioni, ovvero nella sua equivalente

$$rT'\frac{\psi'}{\mu'} + rT\left(\frac{\psi'}{\mu'}\right)' + n\mu'\left(t\left(1+\left(\frac{r}{\rho}\right)\right)_1 + t\mu'\left(1+\frac{r}{\rho}\right)n_1 + Q = 0$$

somministrano la

$$t\left(1+\frac{r}{\rho}\right)\mu' n_{,}+r\mathrm{T}\left(\left(\frac{\psi'}{\mu'}\right)'-cn\left(\frac{1}{\mu'}\right)'-mn\left(\frac{\varphi'}{\mu'}\right)'-n^2\left(\frac{\psi'}{\mu'}\right)'\right)+\mathrm{Q}\left(1-n^2-\frac{\psi'^2}{\mu'^2}\right)=0.$$

E per tanto le tre prime equazioni sopra trovate equivalgono alle tre seguenti

$$r\mu'\mathrm{T}'+\psi'\mathrm{Q}=0,$$

$$\mu'\left(t+\frac{rt}{\rho}\right)_{,}+r\mathrm{T}\left(c\left(\frac{1}{\mu'}\right)'+m\left(\frac{\varphi'}{\mu'}\right)'+n\left(\frac{\psi'}{\mu'}\right)'\right)+n\mathrm{Q}=0,$$

$$\left(t+\frac{rt}{\rho}\right)\mu' n_{,}+r\mathrm{T}\left(\left(\frac{\psi'}{\mu'}\right)'-cn\left(\frac{1}{\mu'}\right)'-mn\left(\frac{\varphi'}{\mu'}\right)'-n^2\left(\frac{\psi'}{\mu'}\right)'\right)+\left(1-n^2-\frac{\psi'^2}{\mu'^2}\right)\mathrm{Q}=0$$

le quali si possono combinare in modo di ottenerne una, nella quale vi sia una sola delle tre funzioni $\mathrm{T}, t, \mathrm{Q}$ colle sue derivate. Per esempio, ponendo nelle prime due in luogo della Q il suo valore tratto dalla terza, e poscia ponendo in quella risultante dalla seconda in vece della $t$ il suo valore desunto da quella risultante dalla prima, si otterrà un' equazione nella quale vi sarà la T e le sue derivate $\mathrm{T}', \mathrm{T}_{,}, \mathrm{T}'_{,}$, la quale darà il valore della T, che sostituito nella prima delle tre ultime esposte darà la Q; e questo valore insieme a quello della stessa T posto nella terza somministrerà la $t$.

Finalmente si osservi che per la proposizione tredicesima della Memoria sopra citata si ha

$$\mathrm{Q}=\left(\Delta+\frac{\Delta^2}{2r}+\frac{\Delta^2}{2\mathrm{R}}+\frac{\Delta^3}{3r\mathrm{R}}\right)\frac{\mathrm{R}r\mu'}{\rho}$$

dove $\mathrm{R}=\rho+r$; e conseguentemente eguagliando questo valore della Q a quello della Q stessa trovato come si è detto sopra, si avrà una equazione colla quale si potrà determinare la grossezza della Volta corrispondente ad un punto qualunque della sua superficie interna.

La determinazione della $\Delta$ grossezza si potrà anco ridurre alla integrazione di quella equazione, che si avrebbe sostituendo i valori della Q e delle sue derivate nella equazione risultante dalla eliminazione delle due funzioni arbitrarie, e della costante contenute nella espressione della Q medesima: questo metodo però riescirà generalmente più difficile e complicato dell' altro quì indicato.

Le costanti e funzioni arbitrarie introdotte dalle integrazioni sopra indicate ed occorrenti per le determinazioni delle $t$, T, Q, $\Delta$ si potranno determinare facilmente, quando si conosceranno alcuni valori opportuni delle $t$, T, $\Delta$ medesime; come si è detto e fatto per altre Volte superiormente.

Non espongo le equazioni che si debbono verificare nello stato di equilibrio di una Volta annulare qualunque, ed analoghe a quelle esposte superiormente pel caso che la linea generatrice sia una circonferenza, perchè la loro determinazione non presenta nessuna difficoltà, se si eccettua la prolissità di calcolo, dopo ciò che abbiamo detto sopra.

*Delle Volte che hanno per introdos una superficie sviluppabile qualunque.*

Sebbene poche siano le Volte che abbiano le superficie interne sviluppabili, le quali non siano cilindriche o coniche, nulladimeno voglio esporre per esse ciò che ho esposto per le altre, affinchè si vegga meglio l' estensione che si può dare a questa materia mediante i principj ammessi in questa Memoria.

La curva ACE (fig. 7.) esprima lo spigolo di regresso della superficie interna della Volta; le rette CM . ., DH . . due sue prossime caratteristiche; le FM . ., GL . . due altre linee prossime fra loro situate in essa superficie e fra quelle che sono perpendicolari alle caratteristiche: le quattro linee CM . ., DH . ., FM . ., GL . . saranno altrettante linee di curvatura della superficie interna della Volta. Si chiami $t$ la pressione che soffre il punto M secondo la toccante in M della linea FM, T quella che soffre secondo la CM, $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ i coseni degli angoli che fa la $t$ cogli assi delle $x$, $y$, $z$; $a$, $b$, $c$ quelli degli angoli che fa la T coi medesimi assi; $du$ l' angolo di contingenza dello spigolo di regresso, $v$ la CM, e secondo il solito $Qdudv$ esprima il peso del cuneo che insiste sul quadrilatero rettangolo MLNH.

Si decompongano le $t$, T in tre parallele agli assi delle $x$, $y$, $z$, e si avranno le $\alpha t$, $\beta t$, $\gamma t$; $a$T, $b$T, $c$T; e però il cuneo anzidetto in virtù delle pressioni $t$, T sarà soggetto secondo i prolungamenti degli medesimi $Ox$, $Oy$, $Oz$ alle forze.

$$-(\alpha t)'dudv - a(v\mathrm{T})_{,}dudv,$$

$$-(\beta t)'dudv - b(v\mathrm{T})_{,}dudv,$$

$$-(\gamma t)'dudv - c(v\mathrm{T})_{,}dudv;$$

e pertanto, siccome il cuneo stesso è soggetto secondo l'asse delle $z$ anco alla forza $-Qdudv$, avranno luogo le tre equazioni

$$(\alpha t)' + a(v\mathrm{T})_{,} = 0,$$

$$(\beta t)' + b(v\mathrm{T})_{,} = 0,$$

$$(\gamma t)' + c(v\mathrm{T})_{,} + \mathrm{Q} = 0,$$

le quali equivalgono a tre altre semplicissime, che si possono desumere da esse, come segue.

Si moltiplichino le esposte equazioni rispettivamente per $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, e si sommino le tre risultanti; ed avrassi la

$$t' + \gamma\mathrm{Q} = 0,$$

per essere $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1$, $\alpha\alpha'+\beta\beta'+\gamma\gamma'=0$, $a\alpha+b\beta+c\gamma=0$.

Si moltiplichino le medesime tre equazioni rispettivamente per $a$, $b$, $c$, e si uniscano fra loro le risultanti; e si avrà la

$$(a\alpha'+b\beta'+c\gamma')t+(v\mathrm{T})_{,}+c\mathrm{Q}=0, \text{ ossia } t-(v\mathrm{T})_{,}-c\mathrm{Q}=0,$$

per essere $a\alpha'+b\beta'+c\gamma'=-\alpha a'-\beta b'-\gamma c'$, ed $a=\frac{dx}{ds}$, $b=\frac{dy}{ds}$, $c=\frac{dz}{ds}$, $\alpha=\frac{1}{du}d\frac{dx}{ds}$, $\beta=\frac{1}{du}d\frac{dy}{ds}$, $\gamma=\frac{1}{du}d\frac{dz}{ds}$, ove l'$s$ esprima l'arco AC; e però

$$a\alpha'+\beta b'+\gamma c'=\frac{1}{du^2}\left[\left(d\frac{dx}{ds}\right)^2+\left(d\frac{dy}{ds}\right)^2+\left(d\frac{dz}{ds}\right)^2\right]=\left(\frac{du}{du}\right)^2=1,$$

per la proposizione sesta della citata Memoria sulle linee e superficie parallele.

In terzo luogo si combini la prima alla seconda, e la prima stessa alla terza delle medesime tre equazioni in modo da eliminare $(vT)_{,}$, e si avranno le due

$$(ab - a\beta)t' + (b\alpha' - a\beta')t = 0,$$

$$(ac - a\gamma)t' + (c\alpha' - a\gamma')t - aQ = 0,$$

dalle quali eliminando la $t'$ si ottiene la sola

$$[(\beta c - b\gamma)\alpha' + (a\gamma - c\alpha)\beta' + (b\alpha - a\beta)\gamma']t + (b\alpha - a\beta)Q = 0,$$

ovvero $(h\alpha' + m\beta' + n\gamma')t + n\,Q = 0$,

dove le $h$, $m$, $n$ esprimano i coseni degli angoli che fa la retta perpendicolare al piano osculatore allo spigolo di regresso in C coi prolungamenti degli assi delle $x$, $y$, $z$.

Ma per essere

$$h = \frac{dyd^2z - dzd^2y}{duds^2},\quad m = \frac{dzd^2x - dxd^2z}{duds^2},\quad n = \frac{dxd^2y - dyd^2x}{duds^2}$$

risulta $-\alpha h' - \beta m' - \gamma n'$ eguale ad

$$\frac{1}{du^4ds^3}\,(dxd^3yd^3z + dzd^2xd^3y + dyd^2zd^3x - dxd^2zd^3y - dyd^2xd^3z - dzd^3yd^3x)$$

cioè alla derivata rispetto alla $u$ dell' angolo compreso fra i consecutivi piani osculatori dello spigolo di regresso della superficie interna della Volta, come si può vedere nella Memoria sull' equilibrio delle curve elastiche inserita nell' ultimo tomo della stessa Società Italiana; così chiamato $i$ quest' angolo, sarà

$$-\alpha h' - \beta m' - \gamma n',\ \text{ovvero}\ h\alpha' + m\beta' + n\gamma' = \left(\frac{di}{du}\right);$$

adunque si avrà

$$\left(\frac{di}{du}\right)t + \frac{dxd^2y - dyd^2x}{duds^2}\,Q = 0,$$

$$\text{ossia}\ tdi + Q\,\frac{dx^2}{ds^2}\,d\frac{dy}{ds} = 0$$

dove la variabile principale sia la $u$. Vale a dire le tre equazioni trovate superiormente saranno equivalenti alle tre seguenti

$$\left(\frac{dt}{du}\right) - \frac{d\frac{dz}{ds}}{du} Q = o,$$

$$t\left(\frac{di}{du}\right) + \frac{dx^2}{ds^2} \frac{d\frac{dy}{ds}}{du} Q = o,$$

$$t + (Tv)_1 + \frac{dz}{ds} Q = o;$$

colle quali si potranno determinare con facilità le funzioni $t$ T , Q. Difatto colle prime due si possono determinare facilmente le $t$, Q, ed in seguito colla terza la T.

Determinata la Q si potrà costituire l' equazione da cui desumere la $\Delta$ grossezza, essendo pel corollario della proposizione tredicesima della Memoria sulle linee e superficie parallele $Q = (\Delta + \frac{\Delta^2}{2R})$ MC,

dove la R esprima il raggio finito di curvatura corrispondente al punto M della superficie interna della Volta.

Non parlo della maniera di determinare le due funzioni arbitrarie delle $u, v$ che introdurrebbero le due equazioni ad integrarsi per avere le $t$, Q, T, perchè basta ciò che ho detto per le altre specie di Volte; e passo in vece a parlare dell' equilibrio di una Volta qualunque.

*Di una Volta qualunque.*

Siano rappresentate colle TM . ., TH . . (fig. 8.) due prossime linee entrambe della massima o della minima curvatura della superficie interna della Volta, e colle $t$M . ., $t$L . . due invece della minima o della massima curvatura; e coi punti C, G, A, E le projezioni sul piano delle $x$, $y$ di quelli che sono comuni alle linee TM . ., TH . ., $t$M . ., $t$L . . ed alle DT . ., D$t$ . . sezioni fatte alla superficie medesima dai piani verticali delle ordinate $y$, $z$, $x$, $z$.

È facile il concepire che le tre coordinate del punto M

saranno funzioni delle OA, OC; per cui posto $OA = v$, $OC = u$, sarà

$$x = \varphi(v, u),\ y = f(v, u),\ z = \psi(v, u)$$

ove le $\varphi$, $f$, $\psi$ esprimono tre funzioni conosciute per ogni Volta particolare, e le $x$, $y$, $z$ le coordinate rettangole del punto M: come anco che ritenuta costante la $v$, le equazioni

$$x = \varphi(v, u),\ y = f(v, u),\ z = \psi(v, u)$$

rappresenteranno la linea $t$M; e ritenuta costante la $u$ esprimeranno esse in vece la linea TM...

Si chiamino $t$, T le pressioni che soffre il punto M secondo le toccanti in M delle linee $t$M, TM; $a$, $b$, $c$ i coseni degli angoli fatti dalla $t$ cogli assi $Ox$, $Oy$, $Oz$; $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ quelli degli angoli compresi dalla T coi medesimi tre assi; $\mu$ l'arco $t$M, $\lambda$ il TM; e si rappresenti quì pure il peso del cuneo appoggiato al rettangolo MHNL con $Q dudv$.

Siccome le pressioni $t$, T equivalgono, la prima alle tre $at$, $bt$, $ct$ e la seconda alle $\alpha$T, $\beta$T, $\gamma$T dirette rispettivamente secondo i prolungamenti degli assi $Ox$, $Oy$, $Oz$; così il cuneo avente $Q dudv$ per peso, per le pressioni dei cunei suoi adiacenti sarà soggetto alle tre forze

$$-(at\lambda_{,})' dudv - (\alpha T\mu')_{,} dudv,$$
$$-(bt\lambda_{,})' dudv - (\beta T\mu')_{,} dudv,$$
$$-(ct\lambda_{,})' dudv - (\gamma T\mu')_{,} dudv$$

dirette secondo i medesimi prolungamenti degli assi $Ox$, $Oy$, $Oz$. Ma queste pressioni nello stato di equilibrio della Volta debbono equilibrare il peso del cuneo; adunque in questo stato sussisteranno le tre equazioni seguenti

$$(at\lambda_{,})' + (T\alpha\mu')_{,} = 0,$$
$$(bt\lambda_{,})' + (T\beta\mu')_{,} = 0,$$
$$(ct\lambda_{,})' + (T\gamma\mu')_{,} + Q = 0.$$

Moltiplicando queste tre equazioni ordinatamente per $a$, $b$, $c$ e per $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ e sommando le prime tre risultanti e separatamente le altre tre, ed osservando che hanno luogo le condizioni

$$a^2+b^2+c^2=1,\ a^2+\beta^2+\gamma^2=1,\ aa+b\beta+c\gamma=0,$$
$$aa'+bb'+cc'=0,\ aa_1+\beta\beta_1+\gamma\gamma_1=0,$$

si ottengono le due equazioni

$$(t\lambda_1)'+\mu'(aa_1+b\beta_1+c\gamma_1)T+cQ=0,$$
$$(T\mu')_1+\lambda_1(aa'+\beta b'+\gamma c')t+\gamma Q=0.$$

Combinando poi la prima alla seconda e la prima alla terza delle medesime tre equazioni in modo da eliminare $(T\mu')_1$ si hanno le due

$$(a\beta-b\alpha)(t\lambda_1)'+\lambda_1(\beta a'-\alpha b')t+\mu'(\beta\alpha_1-\alpha\beta_1)T=0,$$
$$(a\gamma-c\alpha)(t\lambda_1)'+\lambda_1(\gamma a'-\alpha c')t+\mu'(\gamma\alpha_1-\alpha\gamma_1)T-\alpha Q=0,$$

dalle quali eliminando la quantità $(t\lambda_1)'$ si ottiene l' equazione

$$[\,\alpha(cb'-bc')+\beta(ac'-ca')+\gamma(ba'-ab')\,]t\lambda_1$$
$$+[\alpha(\beta\gamma_1-\gamma\beta_1)+b(\gamma\alpha_1-\alpha\gamma_1)+c(\alpha\beta_1-\beta\alpha_1)]T\mu'+(a\beta-\alpha b)Q=0,$$

colla quale insieme alle due trovate sopra si potranno determinare sempre le $t$, T, Q.

Se nelle due equazioni

$$(t\lambda_1)'+\mu'(aa_1+b\beta_1+c\gamma_1)T+cQ=0,$$
$$(T\mu')_1+\lambda_1(aa'+\beta b'+\gamma c')t+\gamma Q=0$$

si porrà il valore di Q tratto dall' ultima trovata, si otterranno due altre equazioni nella prima delle quali vi saranno $t$, T, $t_1$, e nell' altra $t$, T, T' colle quali evidentemente si potranno determinare le pressioni $t$, T; giacchè se per esempio nella seconda si porrà il valore della T cavato dalla prima, si otterrà una equazione nella quale vi saranno le sole quantità $t$, $t_1$, $t'$, $t'_1$, colla quale si potrà determinare il valore della $t$, il quale posto nel valore della T cavato dalla prima farà conoscere la T stessa: conoscendosi poi entrambe le $t$, T si determinerà facilissimamente anco la Q, mediante una qualunque delle tre equazioni medesime sopra trovate; quindi anco la $\Delta$ grossezza della Volta, essendo pel corollario della tredicesima proposizione della Memoria sulle linee e superficie parallele già citata più volte

$$Q=\left(\Delta+\frac{\Delta^2}{2r}+\frac{\Delta^2}{2R}+\frac{\Delta^3}{3rR}\right)\mu'\lambda_1,$$

ove si intendano colle $r$, R i due raggi di curvatura della superficie interna della Volta e corrispondenti al punto M di essa.

In fine stimo di far osservare che i coefficienti dei termini delle equazioni dalle quali si possono desumere mediante opportune integrazioni le $t$, T, Q sono altrettante funzioni note delle variabili $v$, $u$, essendo come è noto

$$\mu' = \sqrt{(\varphi'^2 + f'^2 + \psi'^2)}\,,\quad a = \frac{\varphi'}{\mu'}\,,\quad b = \frac{f'}{\mu'}\,,\quad c = \frac{\psi'}{\mu'}\,,$$

$$\lambda_1 = \sqrt{(\varphi_1^2 + f_1^2 + \psi_1^2)}\,,\quad \alpha = \frac{\varphi_1}{\lambda_1}\,,\quad \beta = \frac{f_1}{\lambda_1}\,,\quad \gamma = \frac{\psi_1}{\lambda_1}\,.$$

Determinata la $\Delta$ grossezza della Volta facilmente si potrà trovare l' equazione della sua superficie esterna; giacchè chiamate X, Y, Z le tre coordinate parallele rispettivamente alle $x$, $y$, $z$ di quel suo punto che trovasi nella normale, la superficie interna corrispondente al punto a cui corrispondono le stesse $x$, $y$, $z$, si hanno le equazioni

$$(X-\varphi)^2 + (Y-f)^2 + (Z-\psi)^2 - \Delta^2 = 0\,,$$
$$(X-\varphi)\varphi' + (Y-f)f' + (Z-\psi)\psi' = 0\,,$$
$$(X-\varphi)\varphi_1 + (Y-f)f_1 + (Z-\psi)\psi_1 = 0$$

dalle quali eliminando le $v$, $u$ si avrà una sola equazione fra le X, Y, Z, che sarà l' equazione cercata, cioè della superficie esterna della Volta.

Osservazione 1.ª Se invece di fissare per superficie di equilibrio di una Volta la superficie interna di essa, si volesse fissare quella che passa pei centri di gravità dei cunei di essa e da noi contemplati, bisognerebbe immaginarsi quest' altra superficie composta dei quadrilateri compresi fra le superficie sviluppabili che sono altrettante faccie laterali dei cunei medesimi, e scrivere algebraicamente l'equilibrio per uno qualunque di questi quadrilateri „ i quali in generale non saranno rettangoli „ avendo di mira le pressioni che soffrono i suoi lati ed il peso del cuneo corrispondente.

Sebbene dopo le cose esposte non sia difficile lo scrivere le equazioni che debbono aver luogo ammessa quest'altra

superficie d'equilibrio, nulladimeno stimo bene di indicare la via a seguirsi avendo di mira una Volta qualunque.

Si rappresenti colla *mhnl* (fig. 8.) quella porzione quadrilatera della superficie dei centri di gravità corrispondente all' MHNL della superficie interna; e si chiami $t$ la pressione che soffre il punto $m$ secondo quella normale della $ml$ che è anco toccante la superficie $emk\ldots$, T l' analoga pressione sofferta dallo stesso punto $m$ secondo quella normale della $km$, la quale è toccante la stessa superficie $emk\ldots$ in $m$; così si esprimano i coseni degli angoli che fanno le $t$, T cogli assi delle solite $x$, $y$, $z$ colle $a$, $b$, $c$; $\alpha$, $\beta$, $\gamma$; e gli archi $mk\ldots$, $me\ldots$ colle $\varpi$, $\pi$. E si ritengano per le $x$, $y$, $z$, $\Delta$, $v$, $u$, $r$, R, $f$, $\varphi$, $\psi$, Q, $\mu$, $\lambda$, i significati sopra stabiliti; e si troverà la distanza dalla superficie MHNL al centro di gravità del cuneo corrispondente eguale a

$$\left(\frac{1}{2}\Delta^2+\frac{\Delta^3}{3r}+\frac{\Delta^3}{3R}+\frac{\Delta^4}{4rR}\right):\left(\Delta+\frac{\Delta^2}{2r}+\frac{\Delta^2}{2R}+\frac{\Delta^3}{3rR}\right)$$

ossia $(6Rr+4\Delta(r+R)+3\Delta^2)\Delta : 2(6Rr+3\Delta(r+R)+2\Delta^2)$;

e però chiamate $p$, $q$, $s$ le coordinate di esso centro e parallele alle $x$, $y$, $z$, si avrà

$$(p-\varphi)^2+(q-f)^2+(s-\psi)^2=D^2,$$
$$(p-\varphi)\varphi'+(q-f)f'+(s-\psi)\psi'=0,$$
$$(p-\varphi)\varphi_1+(q-f)f_1+(s-\psi)\psi_1=0,$$

dove D è posta per la distanza anzi trovata.

Se fosse conosciuta la $\Delta$, eliminando da queste tre equazioni le $v$, $u$ si avrebbe in $p$, $q$, $s$ l' equazione della superficie, che è il luogo geometrico dei centri di gravità dei cunei della Volta, cioè l' equazione fra le coordinate rettangole della superficie d' equilibrio attuale. Così, se nelle medesime tre equazioni si considererà $v$ costante ed $u$ variabile, esse apparterranno alla linea $km\ldots$, e se si considererà $u$ costante e $v$ variabile, esprimeranno in vece la linea $em\ldots$

Ragionando come si è fatto nella ipotesi che la superficie di equilibrio fosse la interna della Volta si trovano le equazioni

$(at\pi_1)'+(\alpha T\varpi')_1=0$, $(bt\pi_1)'+(\beta T\varpi')_1=0$, $(ct\pi_1)'+(\gamma T\varpi')_1+Q=0$;

ed $a$, $b$, $c$ esprimono i coseni degli angoli fatti cogli assi delle $x$, $y$, $z$ dalla retta comune ai due piani espressi dalle equazioni

$xp_1+yq_1+zs_1=0$, $(s'q_1-q's_1)x+(p's_1-s'p_1)y+(q'p_1-p'q_1)z=0$;

ed $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ quelli fatti cogli stessi assi da quella comune ai piani aventi per equazioni

$xp'+yq'+zs'=0$, $(s'q_1-q's_1)x+(p's_1-s'p_1)y+(q'p_1-p'q_1)z=0$:

nelle prime due di queste equazioni le $x$, $y$, $z$ esprimono le coordinate rettangole dei due piani rappresentati da esse, e nelle ultime esse rappresentano le coordinate analoghe dei piani espressi da queste medesime; e le condizioni alle quali si potranno appoggiare le riduzioni delle equazioni provenienti dalle medesime tre equazioni esposte sono quelle rappresentate dalle

$$a^2+b^2+c^2=1,\quad \alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1$$

e dalle derivate di queste rispetto alle variabili indipendenti $v$, $u$.

Osservazione 2.ª Nelle cose esposte ho supposto tacitamente che la gravità fosse la sola forza attiva agente sulle parti della Volta, e che la Volta stessa fosse di densità uniforme; è però agevole il fare considerazioni simili pel caso che altre forze qualsivogliono siano quelle agenti sui punti della materia della Volta, e che essa sia a densità variabile, purchè siano note le leggi sì delle une che dell' altra di queste quantità.

Osservazione 3.ª Nelle intavolazioni delle quistioni superiormente trattate ho fatto uso degli ordinarj principj del calcolo differenziale Leibniziano, ora quì tratterò una quistione analoga mediante i principj del calcolo delle derivate, onde indicare la strada che potrà seguire chi volesse dimostrare tutto ciò che si è fatto in questa Memoria col metodo delle derivate medesime; e perchè questa indicazione riesca più interessante, dimostrerò le ordinarie equazioni, che hanno luo-

go nello stato di equilibrio delle Volte di rotazione aventi l'asse verticale, e di cui ogni loro punto è animato da due forze, l'una verticale e l'altra diretta verso lo stesso asse della Volta.

OARC (fig. 9.) esprima una quarta parte della superficie interna della Volta, OB il suo asse, OR, OS due suoi meridiani; EMN .., PLH .. due suoi paralleli qualsivogliono; BA, BR, BS, BL altrettanti raggi della circonferenza ARSC .., ed EF, MF due del parallelo EMN ...

Si fissino per assi delle $x$, $y$, $z$ rispettivamente le rette OB$x$, O$y$, O$z$, dove la O$y$ sia situata nel piano di ABO; e si chiami $x$ l'ordinata OF, $u$ la FM, $s$ l'arco MO, $\xi$ l'angolo ABR, P$(x, \xi)$ o semplicemente P la forza che anima il punto M dall'alto in basso parallelamente alla O$x$, Q$(x, \xi)$ o Q quella che anima lo stesso punto M secondo la MF; $x+\omega$ l'ordinata secondo O$x$ del punto L del parallelo PL ..; $\xi+\alpha$ l'angolo ABS, ossia $\alpha$ l'RBS; in fine si chiamino $t$, T le pressioni sofferte dallo stesso punto M, la prima secondo la tangente in M del meridiano OM .., e l'altra secondo la toccante in M medesimo dell'arco EM.

Essendo P$(x, \xi)$, P$(x+\omega, \xi)$, P$(x, \xi+\alpha)$, P$(x+\omega, \xi+\alpha)$ le forze che animano i punti M, L, N, H parallelamente alle $x$, ed $\omega\alpha . us' + A$ l'area del quadrilatero MNHL, dove la $s'$ è posta secondo il solito in luogo di $\left(\frac{ds}{dc}\right)$, ed A è una funzione d'$\omega$ ed $\alpha$, dove questi aumenti hanno almeno tre dimensioni e di cui sono determinabili facilmente i limiti; la forza totale animante il quadrilatero MNHL in virtù delle forze analoghe alla P sarà la seguente

$$\omega\alpha . Pus' + B ,$$

dove la B ha delle proprietà analoghe alle anzidette della A.

Così per essere $\frac{t}{s'}$ quella componente della pressione $t$, che agisce verticalmente, ed $\alpha u$ l'arco MN, la pressione sofferta dal quadrilatero MNHL verticalmente dall'alto in basso sarà

$a\,\frac{ut}{s'} + C$, e quella dal basso in alto

$$a\,\frac{ut}{s'} + C + a\omega\left(\frac{d\,\frac{ut}{s'}}{dx}\right) + D,$$

dove le C, D sono quantità anch' esse analoghe alle A, B; e però il medesimo quadrilatero MNHL soffrirà una pressione dal basso in alto verticalmente espressa da

$$a\omega\left(\frac{d\,\frac{ut}{s'}}{dx}\right) + D.$$

Ma questa pressione è equilibrata dalle forze analoghe alla P che agiscono sul quadrilatero MNHL; adunque avrà luogo l' equazione

$$\omega a.\,Pus' + B = a\omega\left(\frac{d\,\frac{ut}{s'}}{dx}\right) + D.$$

Quindi si avrà la $Pus' = \left(\frac{d\,\frac{ut}{s'}}{dx}\right)$.

Facilmente si dimostra che gli effetti delle forze Q sul quadrilatero MNHL agenti parallelamente agli assi delle $y, z$ e secondo i loro prolungamenti sono espressi, il primo da $-a\omega Qus'\cos.\xi - E$, e il secondo da $-\omega a Qus'\text{sen}.\xi - F$, ove le E, F sono quantità analoghe alle A, B, ecc. Così essendo $\frac{tu'}{s'}\cos.\xi$, $\frac{tu'}{s'}\,\text{sen}.\xi$ le due componenti della $t$ parallele ed a seconda degli assi delle $y, z$, il quadrilatero MNHL soffrirà parallelamente a questi medesimi assi le pressioni

$$-a\omega\left(\frac{d\,\frac{tuu'}{s'}}{dx}\right)\cos.\xi - G\,,\quad -a\omega\left(\frac{d\,\frac{tuu'}{s'}}{dx}\right)\text{sen}.\xi - H,$$

dove le G, H sono ecc., ed $u'$ è posta in vece di $\left(\frac{du}{dx}\right)$.

Similmente per essere la pressione T equivalente alle due $-T\text{sen}.\xi$, $T\cos.\xi$ dirette parallelamente ed a seconda delle $y, z$, il quadrilatero medesimo MNHL in virtù delle pres-

sioni analoghe alla T sarà soggetto secondo le stesse $y$, $z$ alle azioni delle forze

$$\omega\alpha\left(\frac{d\mathrm{T}\mathrm{sen}.\xi}{d\xi}\right)s' + \mathrm{M},\quad -\omega\alpha\left(\frac{d.\mathrm{T}\cos.\xi}{d\xi}\right)s' - \mathrm{N},$$

dove le M, N sono anch'esse quantità analoghe alle A, B, ecc.

Riunendo le cose quì esposte si comprenderà che nello stato di equilibrio del quadrilatero MNHL debbono sussistere anco le due equazioni

$$-\alpha\omega Qus'\cos.\xi - \mathrm{E} - \alpha\omega\left(\frac{d\,\frac{tuu'}{s'}}{dx}\right)\cos.\xi - \mathrm{G} + \alpha\omega\left(\frac{d\mathrm{T}\mathrm{sen}.\xi}{d\xi}\right)s' + \mathrm{M} = 0,$$

$$-\alpha\omega Qus'\mathrm{sen}.\xi - \mathrm{F} - \alpha\omega\left(\frac{d\,\frac{tuu'}{s'}}{dx}\right)\mathrm{sen}.\xi - \mathrm{H} - \alpha\omega\left(\frac{d\mathrm{T}\cos.\xi}{d\xi}\right)s' - \mathrm{N} = 0,$$

indipendentemente dagli aumenti indeterminati $\alpha$, $\omega$, e però sarà

$$Qus'\cos.\xi + \left(\frac{d.tuu':s'}{dx}\right)\cos.\xi - s'\left(\frac{d\mathrm{T}\mathrm{sen}.\xi}{d\xi}\right) = 0,$$

$$Qus'\mathrm{sen}.\xi + \left(\frac{d\,tuu':s'}{d\xi}\right)\mathrm{sen}.\xi + s'\left(\frac{d\mathrm{T}\cos.\xi}{d\xi}\right) = 0.$$

Moltiplicando la prima di queste ultime due equazioni per sen. $\xi$, e la seconda per cos. $\xi$, e sottraendo l' una dall' altra delle risultanti, si ha un' equazione la quale si riduce alla $\left(\frac{d\mathrm{T}}{d\xi}\right) = 0$; e conseguentemente le medesime due ultime equazioni quì trovate equivarranno alle due

$$\left(\frac{d\mathrm{T}}{d\xi}\right) = 0,\quad Qus' + \left(\frac{d\,tuu':s'}{dx}\right) - s'\mathrm{T} = 0.$$

Quindi nello stato di equilibrio della Volta in quistione avranno luogo le tre equazioni seguenti

$$Pus' - \left(\frac{d.tu:s'}{dx}\right) = 0,\quad \left(\frac{d\mathrm{T}}{d\xi}\right) = 0,$$

$$\left(\frac{d.uu't:s'}{dx}\right) - s'\mathrm{T} + Qus' = 0.$$

La seconda di queste equazioni insegna che la pressione T per uno stesso parallelo qualsivoglia è costante.

Nella ipotesi di T=o, che è generalmente ammessa dai Trattatisti di meccanica, queste tre ultime equazioni si riducono alle due sole seguenti

$$\left(\frac{d.ut:s'}{dx}\right) - Pus' = o\,, \quad \left(\frac{d.uu't:s'}{dx}\right) + Qus' = o,$$

le quali somministrano le notissime

$$dx\int Quds + dy\int Puds = o,\ d.ut + Qudu - Pudx = o.$$

Osservazione 4.ª Nelle ricerche fatte in questa Memoria ho supposto conosciuta la superficie interna della Volta, ed ho determinata la grossezza corrispondente non che le pressioni che hanno luogo secondo le linee di curvatura della stessa superficie interna nello stato di equilibrio della Volta, e non mi sono occupato delle quistioni reciproche, cioè della determinazione della stessa superficie interna; non voglio però ommettere di far osservare che colle equazioni esposte non riesce difficile anco quest' altra ricerca, purchè siano date sufficienti e coerenti proprietà sì della grossezza che delle pressioni che debbono aver luogo.

Osservazione 5.ª In fine potrei anco mostrare come tutte le prime equazioni esposte per ogni specie di Volta si possono desumere dal principio delle velocità virtuali, e propriamente partendo da ciò che dice Lagrange nel paragrafo secondo della sezione quinta della prima parte della sua meccanica analitica; ma siccome, stante le cose esposte, questa nuova applicazione di questo principio riescirà facile a chi conoscerà l' uso fatto di esso dal Sig. Cav. Cisa di Gresì per dimostrare le equazioni relative all' equilibrio delle superficie elastiche già dimostrate altrimenti dal celebre Poisson, così io credo di poterla quì ommettere.

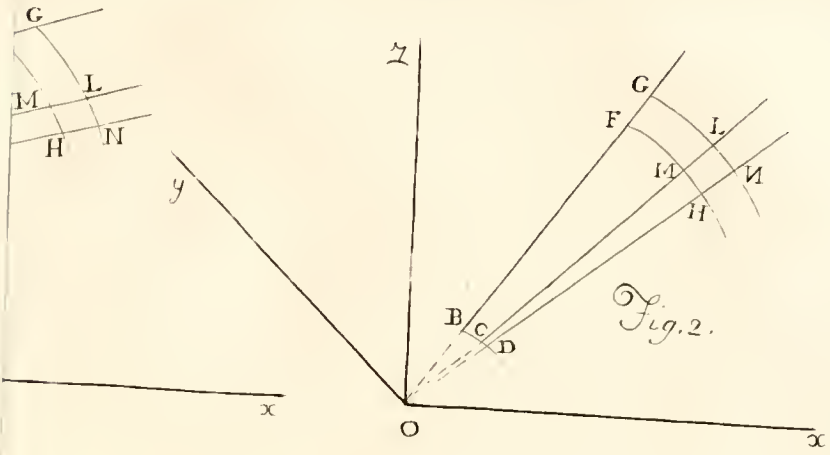

G
M
L
H
N
z
y
x
O
F
B
C
D

Fig. 2.

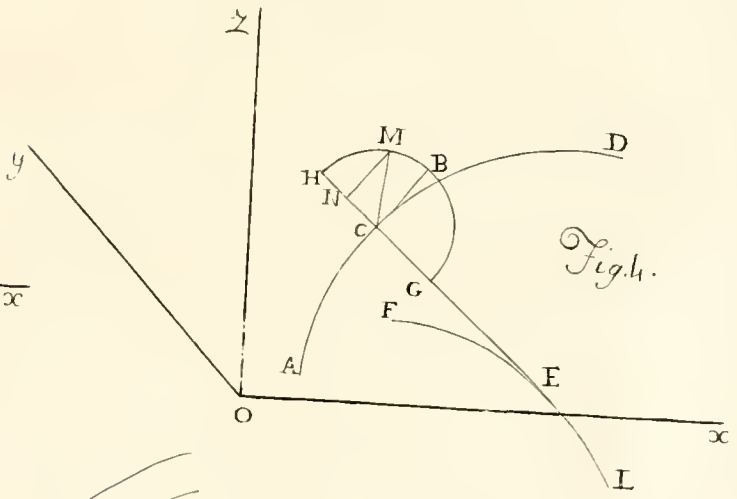
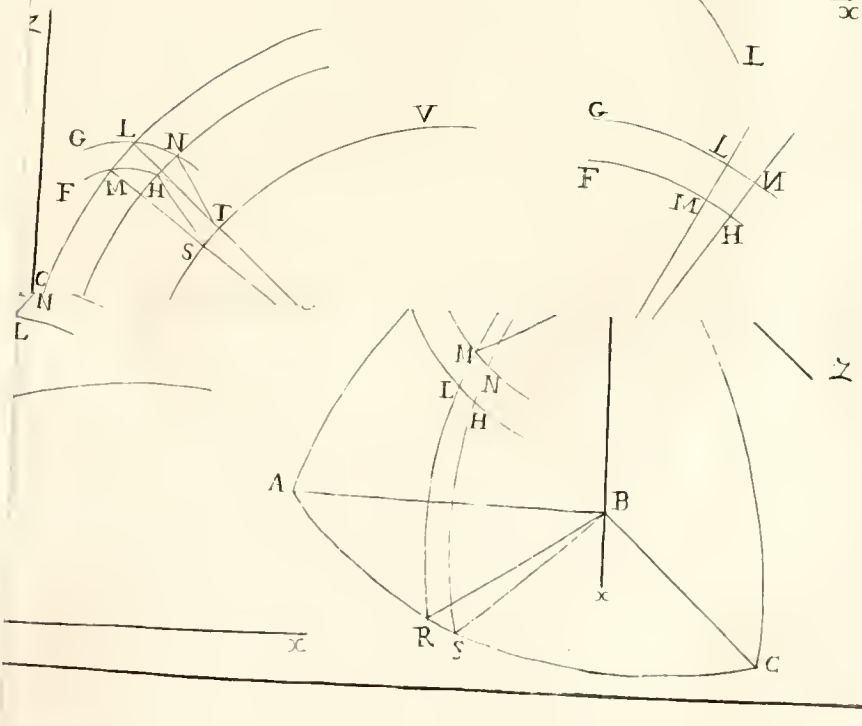

z
y
x
O
M
H
N
B
D
C
G
F
A
E
L

Fig. 4.


z
G
L
N
V
F
M
H
T
S
C
L
M
N
H
A
B
x
R
S
C
z

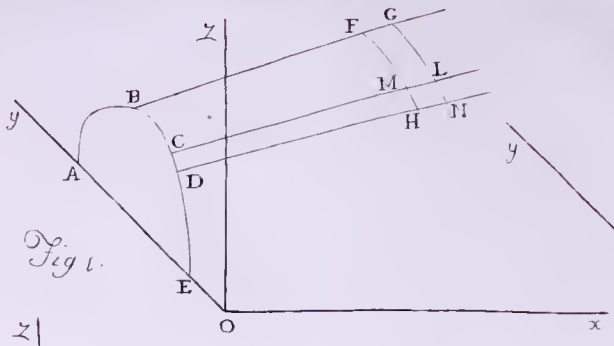



Fig 1.

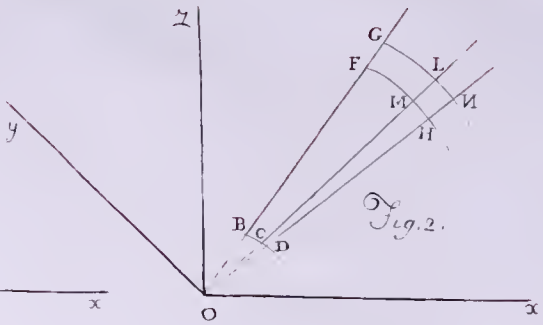



Fig. 2.

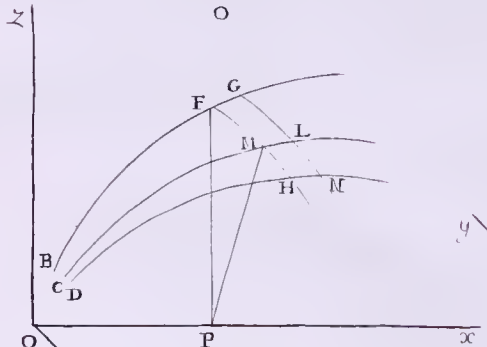



Fig. 3.

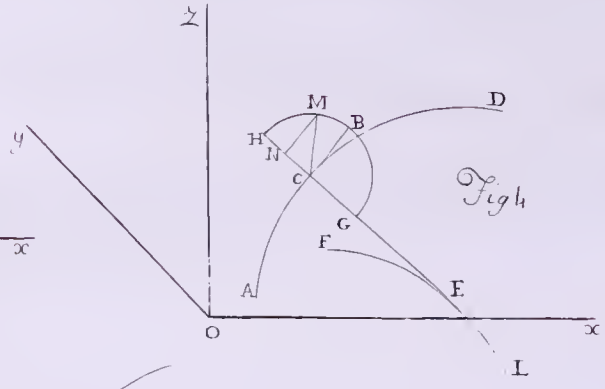



Fig 4

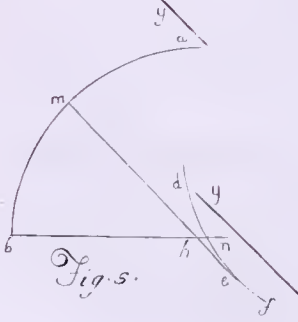



Fig. 5.

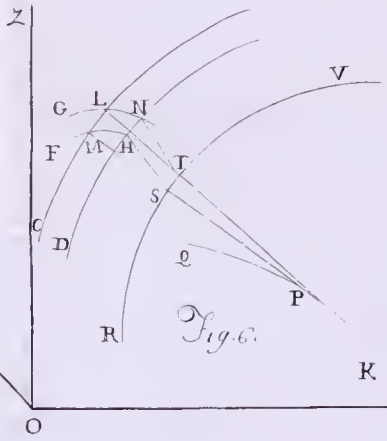



Fig. 6.

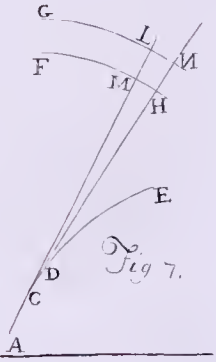



Fig 7.

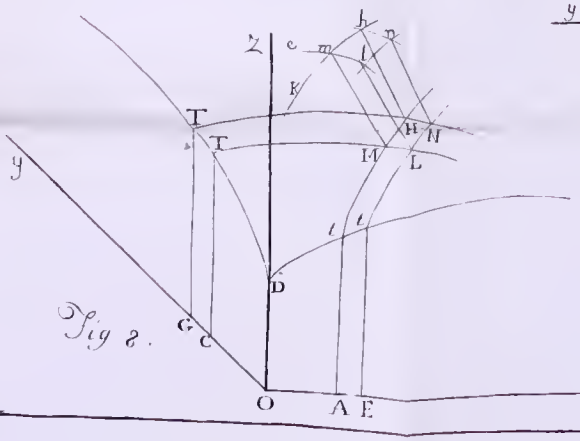



Fig 8.

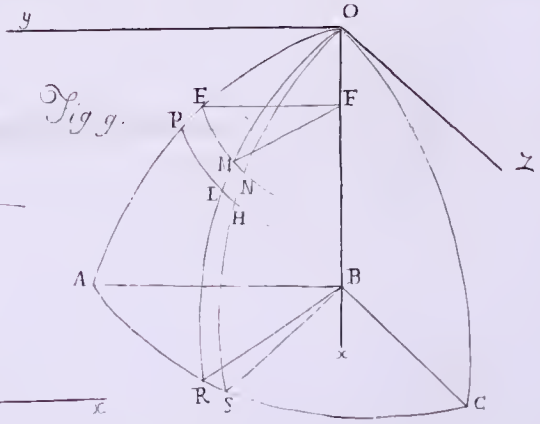



Fig 9.

# SAGGIO

## DELL' AUREA SINTESI GRECO-ITALICA

PRESA IN ESEMPIO

DA UNO DEI MSS. GEOMETRICI INEDITI DEL MATEMATICO

## VINCENZO VIVIANI

# MEMORIA

DI PIETRO FERRONI

*Ricevuta adì* 9. *Luglio* 1821.

Morto nel MDCCIII. più che ottuagenario Viviani Franchi, e quasi spenta con essolui, il quale ambì sempre chiamarsi l' ultimo dei Discepoli di Galileo, quella maniera facile, ordinata, lucida e convincente di scrivere Cose Geometriche insegnatasi nella Scuola d' Arcetri, fu sollecito il Canonico Tocci, raccogliendo le notizie patrie e familiari colla massima diligenza, di stenderne tosto la Vita, che si pubblicò poscia nel primo Volume dell' altre rinnite degli Arcadi Illustri, venuto a luce il MDCCVIII; perocchè l'affettuosissimo Allievo del Gran Lincèo era ancora un de' Pastori del Bosco Parrasio sotto nome d' Erone Geonio, che rammentava il Meccanico celebre di Alessandria d' Egitto. La Vita scritta in Volgare dal Tocci è con poco o punto divario quella stessa, che leggesi recata in Francese da Fontenelle tra gli altri Elogj o Discorsi biografici (*) nella Parte Istorica

(*) Vedasi il N.° XLII. pag. 328. della *Biblioteca Italiana* e l'altro XLIII. pag. 29. dove ( data innanzi contezza d' una Prosa di F. Fontani ) si desidera dall' Estensor dell' Articolo „l'Ar„te di lodare senza adulare, essendo

precedente alle Memorie del Tomo degli Atti del MDCCIII. stampati dall'Accademia delle Scienze di Parigi, alla quale Viviani nella Riforma del MDCIC. fu ascritto come uno degli VIII. soli Socj Stranieri, stante esser egli stato Accademico del Cimento, e di già godente d'una Pensione assegnatali da Luigi XIV. insieme col Dati, suo Collega tra gli Accademici della Crusca e suo Correttore amichevole a un tempo in fatto di tersa Lingua Toscana quando mancava al *Rinvigorito* l'assistenza e consiglio del Magalotti e del Redi. Nulla aggiunsero poi d'importante in riguardo alla Scienza, che professavasi dal lodato Geometra, nè il Lami nè il Fabroni latinamente scrivendone; l'uno nella Parte I. del Volumetto II. intitolato *Memorabilia Italorum eruditione praestantium quibus vertens saeculum gloriatur* (MDCCXLVII.); l'altro nel Tomo I. della Collezion necrologica *Vitae Italorum doctrina excellentium, qui saeculis* XVII. *et* XVIII. *floruerunt* (MDCCLXXVIII.) ove tiene il quarto posto Viviani, ed ove „ così adunatasi la bella Schola „ di Galileo o del „ „ Maestro di color, che sanno, sedente tra filosofica fami- „ glia „ vi s'ammirano sovra tutti (come d'Omero nel IV. dell'*Inferno* cantò l'Alighieri) oltre a lui Cavalerio, Torricelli, e Castelli, luminare ciascuno della restituita Dialettica Universale, qual'appunto si è la Sintetica Geometria. Son però tutti tre quei Scrittori di Vite uniformi nell'asserire che Viviani lasciasse *imperfette* le seguenti sue Opere, cioè, *Tetragonismicorum Libri duo*, *Centrobarycorum Libri*

---

„ oggidì la pratica di profonder gli en- „ comj giunta a tanta depravazione, che „ si adulano persino i morti, e non so- „ lamente quelli, che non furono co- „ nosciuti oltre il proprio Municipio, „ nel che non sarebbe gran male, ma „ eziandio coloro, che per tutt'altro „ lo furono che per *merito di carat-* „ *tere o d'ingegno:* ond'è che spes- „ se volte si verrebbe a indurre la po- „ sterità in errore, se il vero avesse „ bisogno di Scrittori per essere e mo- „ strarsi tale, e *l'ignobilità de' Piag-* „ *giatori* per buona sorte non la pre- „ servasse. E c'intenda chi può „ e n'abbia dovere.

*duo, De Terebratione Solidorum Liber unicus;* e Tocci soggiunge che non erano queste, quando scriveva, smarrite, ma trovavansi allora appresso Jacopo Panzanini nipote *ex sorore* ed erede. Nientedimeno l'Estensore anonimo (Tommaso Bonaventuri) della Prefazione (MDCCXV.) alle XII. „ Lezioni Accademiche „ di Torricelli, non men che dell'altra accuratissima e più piena e forbita alla Impression Fiorentina in III. Tomi delle raccolte Opere di Galileo (MDCCXVIII.) benchè narri particolarità miratissime concernenti diverse singolari Scoperte rimase nei Codici MSS. lasciati dagli Scolari del Galilei, e l'Autore della Lettera al Lami inserita nelle „ Novelle Letterarie „ del MDCCL. (N.° 38) e del „ Saggio di Storia Letteraria Fiorentina del Secolo XVIII. divulgato nel MDCCLIX., sì finalmente della saltereccia, indigesta, e con amaro talento vergata „ Vita di Galileo „ impressa sino dal MDCCXCI. ma latitante da un pezzo, e non ha guari prodotta, non fanno motto, o sol di passaggio lo fanno nelle molte occasioni di ragionare a proposito sulle Dottrine matematiche del Viviani, intorno ad alcuna delle tre menzionate Scritture. E come poteva di leggieri presumersi, nemmanco s'incontrano queste da Montucla accennate e dal suo Revisore e Continuatore Lalande nella „ Histoire des Mathématiques „ dov'è da notarsi (T. II. P. IV. L. 1. §. X.) che, oltre ad assegnar falsamente a Firenze la prima Edizion Bolognese delle Opere di Galileo e la Fiorentina o seconda a Milano (pag. 290), dice che la Vivianèa nuova Volta-a-vela ha la sua Superficie concava, restata sull' Emisferica, eguale a due volte il quadrato del Raggio (pag. 94) mentre quattro per lo contrario n'agguaglia; e seguitando l'istesso errore di *quadratura* anco nella ridetta seconda e più maturata Edizione, come della prima avvisai nel Tomo X. della Società Italiana (P. II. Nota (v) pag. 665), dubita che Viviani non avesse saputo quel che a lui s'era mostrato accadere di raro e ammirabile eziandio al traforante Semicilindro dentro alla Sfera così trapanata, quando siffatta circostanza particolare sta

appunto letteralmente espressa nell' Enunciato del VI. Problema della „ Formazione e Misura di tutti i Cieli ec. „ (MDCXCII.) ivi citata, e dai Francesi due Storiografi (uno de' quali stato in Firenze e notissimo pe 'l suo „ Viaggio „ da capo a fine d' Italia ) non che letta andantemente, non mai, come pare, avuta tampoco sott' occhio.

Avvegnachè l' argomento dei Centri ipotetici di Gravità nel Continuo astrattamente geometrico siasi dagli Antichi trattato, ed in modo special da Archimede, quindi da Pappo, Galileo, Commandino, Torricelli, Cavalerio, Guldino, La Faille, Luca Valerio (MDCLXI. ), Huygens, Leibnitz, Varignon, Ozanam (ediz. del MDCCLXXVIII.), e tanti altri Geometri, quanti, se non *ex professo*, almeno per incidenza, e chi applicando sì fatto Principio per sola induzione o *empirismo*, chi provandone indubitata l' applicazione a ogni sorte di Quantità continua mercè d' una Dimostrazione diretta, tra i quali Gio. Antonio Rocca Italiano fu il primo (Montucla l. c. p. 34, e Nota B. pagine 98-99 ), tuttavia tali sono l' ordine, la semplicità, la chiarezza, e la sagace concatenazione veramente sintetica dei due Libri *Centrobarici* di Viviani, indirizzati mediante la Teoria de' *Momenti* a stabilire dietro al concetto d' una Gravità fuor della fisica le *quadrature* del Circolo, Ellisse, ed Iperbola, sull' esempio del Geometra di Siracusa e del Torricelli per la Parabola, che nulla di più compiuto e meglio lavorato Modello o Tipo degno imitarsi a riguardo dell' Arte rara di saper ben provare, discutere, e dimostrare potrebbe, a senso mio, porsi in essere per addestrar gli Studiosi al ragionamento ed all' inventiva sì nelle Scienze esatte come nell' altre Facoltà e Discipline, le quali in sostanza senza di ciò non si riducon che a debili e qualche volta visibili congbietture ed a mere o vane parole. Che se fosse mai vero quanto Viviani assevera in più articoli delle sue stampe ( nella „ Formazione e Misura di tutti i Cieli ec. „ §. 2. subito dopo la Dedica, nella Prefazione all' *Aristèo*, ec. ec. ( pag. 7-8 ), nell' ultimo *Monitum*, portato

anch' esso a modo d' esempio, del MS. *De Centrobarycis* ch' era in punto d' andar sotto il torchio), vale a dire, che le Selve di tutti i di lui astrusi Trovati eran già fatte nella sua età di circa ai ventitre anni, cioè verso il MDCXLVI. essendo nato nel XXII., tanto più debbon recar maraviglia l' ingegno, il vigor di mente e l' acume di cotal Valentuomo, che penetrò sì addentro e con sì severa giustezza di raziocinio da lasciarsi, benchè adolescente tuttora, indietro chiunqu' altro non ostante ch' ei fosse privo perfino dei Rudimenti dell' Analisi de' Finiti e degl' Infiniti. E se mai si opponesse che introdurre nella Geometria le Regole fondamentali non sue dell' Equilibrio e del Moto fosse sempre stato un confondere e snaturare senza unn sustanziale avvantaggio l' indole delle due Scienze, estrania l' una scambievolmente a fronte dell' altra, potrebbesi in primo luogo agli Oppositori rispondere, che certe idee semplici indefinibili prendono pure i Geometri e gli Analisti in prestanza dalla Meccanica, onde colla direzione, col flusso, col sito, coll' infinito, col giro, e altrettali attribuzioni delle Grandezze, o delle tre specie dell' Estensione, togliere l' oscurità e facilitare l' intelligenza di tutto quello, che non si saprebbe fuori di questa vicendevole unione delle due Facoltà definire, o dichiarare almen giustamente. Ma sarebbe in secondo luogo opposizione di questo tenore oggidì intempestiva; imperocchè le Fondamenta della Statica son ora saldamente gettate sì rapporto alla librazione, sì ancora rignardo al comporre e risolver le Forze, sì finalmente rispetto al collegare giusta il Metodo di Dalembert la Statica colla Dinamica generale mediante il Principio unico della Lieva ossia Vette ridotto a dimostrazione diretta (Tomo X. della Società Italiana delle Scienze e IX. degli Atti de' Fisiocritici), e son confermate eziandio nella loro saldezza per mezzo dell' altro conseguente subalterno Principio dell' Equilibrio stabile o instabile rotto ovver traboccato, cioè delle velocità virtuali o in potenza, immaginate sin da Aristotile (*Quaestiones Me-*

*chanicae* — Libri VIII., *Physicae Auscultationis* Cap. ult. del I. libro — „ Annotazione „ 174. alla Coclea Torricelliana — MDCCCX. presso Molini ), ripetnte da Pappo, e da Galileo nello Scolio della seconda Proposizione del Dialogo III. „ sulle due nuove Scienze „ ( Tomo X. precitato a p. 497.) ( propensioni al moto, velocità *virtuali* come spazj percorsi contemporanei *finiti* ), quindi da Lagrange nel „ Giornale della Scuola Politecnica „ verificate *a posteriori* mediante l' Equilibrazione nei Polispasti ( Taglie, Calcesi, ec. ), e di nuovo da Buzcoy ( in Lipsia — MDCCCXV. ) „ Disviluppamento ulteriore delle *velocità virtuali*, tanto rimovendo i Corpi dallo stato loro di quiete per dei spazj *infinitesimi*, quanto ancora *finiti* ( Montucla T. I. P. I. L. III. §. XX. ). Nè sarei lontan dal concedere negli „ Elementi di Geometria „ che colla facilissima e quasi intuitiva rappresentanza della intera e compiuta ruotazion d' una Retta, quando questa parta da un sito e vi torni rovescia di faccia e d' estremi, si dimostrasse la Somma di tutti gli Angoli esterni di qualunque rettilinea Figura, o Poligono, equivalente sempre ai medesimi quattro Angoli *retti;* nè dispiacerebbemi in oltre, che all' ordinario criterio delle Rette non parallele, portatavi ormai da Legendre e Bertrand l' idea sussidiaria dell' Infinito, difficile a ben abbracciarsi da tutti i lati, ci si sostituisse l' idea men oscura, che sino a tanto che vi sian punti ( e son senza numero ) nella perpendicolare inalzata, si può sempre condurre da ciascuno di essi un' obliqua, e diminuire quanto più si voglia l' obliquità fino a pareggiare in ultimo, come limite inarrivabile, l' altro interno angolo retto. Fermo stante il rigore più austero nel dimostrare le proprietà delle volgate Sezioni del Cono, quanto mai se n' agevolerebbe ed abbrevierebbe il Trattato con associare di subito l' Ellisse al Circolo, e dall' Ellisse derivar la Parabola, e convertir la *diretta* proporzione *locale* alle Rette nell' *inversa* o reciproca, che genererebbe l' Iperbola, discoprendone a un tratto i Rami opposti, e gli Asintoti ? *Asylpintus* e *Diapete* per

*Diatessaron* ( Quarta ) leggesi in un ripurgatissimo „ Vocabolario Latino-Italiano ( Venezia MDCCLXVIII. T. II. 343. ) „ come Greca eleganza in cambio d' *Asymptotos* ( non-concorrente ), e *Diapente* che all' incontro è la Quinta nell' accordo *perfetto* della Scala musicale diatonica.

Del resto venendo a dar ora ragguaglio in particolare di tutte le circostanze del contenuto nel MS. *Centrobarycorum* non ha dubbio non esser tutto autografo del Viviani, disteso nel MDCXLVIII., ritrovato con molti pentimenti e postille sì nel margine che nel testo, sì d' inchiostro che in lapis piombino, dell' istesso suo proprio carattere, e come altrove ho già detto ( T. X. P. II. della Soc. Ital. 591. ) colle licenze debite consegnato alla Stamperia Granducale ( Guiducci ) nel MDCCXV. per pubblicarsi come Opera postuma, e poscia negletto unitamente agli altri summentovati due Scritti, a ciascheduno de' quali mancano le Figure ( *Schemata*, *Diagrammata* così dall' A. appellate ), che ho per intero con estrema pena e delicatezza delineate a mano nell' ore pochissime ed a grandi intervalli di tempo e più riprese concedutemi ad intraprendere e proseguir la lettura. Questi mancati Disegni dee credersi, che o dal Panzanini o dal Nelli seniore o dallo zelantissimo conservatore di patrii tesori in materia di Letteratura d' ogni maniera prenominato Bonaventuri, o da chi altri si fosse, il quale allora presedeva alla stampa, si consegnassero, e gli avessero presso loro gl' Intagliatori o Calcografi all' effetto d' inciderli o in legno od in rame, e che non ritornassero poi nè gli Originali nè le Copie incise alla detta Tipografia, o come non all' uopo altrimenti, amendue si perdessero, o giacessero alla rinfusa separatamente dai Codici, a cui appartenevano (*). Erami dunque indispensabile restituir pienamente allo Scritto il suo smarrito corredo a fin che giungessi così, come più presto bramava, all' adempimen-

(*) La Stamperia Gran Ducale nel 25 di Luglio 1772 passò dall'essere di ragion pubblica in proprietà d'un privato Tipografo.

to del mio desiderio, cioè quello di far conoscere e nella Penisola e fuori a qual segno di maturità e di vaghezza la vera Geometria s' elevasse in virtù degli ammaestramenti di Galileo affratellando agl' Indivisibili in misterioso o allegorico Libramento dietro alla traccia degli *Equiponderanti*, o a dir meglio (senza nome di Gravità) del Centro delle medie distanze dall' Asse di Direzione, ideato dal divino Archimede. Chiaro si renderà dal Compendio, che segue, quanto a malgrado che poco siavi o nulla di nuovo in avanzamento degli artificj speculativi, conducenti a via più rintracciare e scoprire verità sconosciute, con le XXXII. Proposizioni, e Corollarj, e Monizioni, e Scoglj del Libro primo e Appendice, che s' aggirano intorno a Linee e Superficie piane, e debba dirsi l' istesso delle XIX. ed annessi consimili del Libro secondo, l' oggetto de' quali si è d'estendere le ricerche medesime alle Superficie curve ed ai Solidi e loro Frusti rotondi; pur tuttavia di tanta grazia, raffinamento, e venustà quì apparisce la Sintesi impiegata dal Geometra Fiorentino (così nominato per antonomasia il secondo dopo di Paolo dell' Abbaco o Dagomari da Prato) che d' assai vince il modo adoprato da lui nelle due dottissime „ Divinazioni „ sopr' Apollonio e Aristèo, e nel medesimo tema non ammettono comparazione con Oltramontani lavori presso a poco contemporanei, non eccettuata la celebre „ Stereometria „ di Keplero. Più che catena d' esilissime maglie, o sopraffino serico drappo, ed anzi rassomiglianza alle filigrane, alle trine, ai ricami sul fondo di squisito tessuto direi la serie naturalmente progressiva, fluida, e continuata come spontanea di sorìte in sorìte del suo Discorso, sempre crescente di pregio, senza sforzo, senza pause, senza lacune, con digressioni infrequenti, ma tutte a proposito per illustrazione o augumento della nobiltà del subjetto. Si appoggia l' Opera all' unità d' un Principio, tratto dalla VI. Proposizione del II. dei *Tetragonismici* dell' Autore medesimo; ed è sì acconciamente scelto e preposto che agli Ingegni inventivi o creatori addita incontinente le

Prove di tutti i derivatine consecutivi Teoremi e Problemi, poichè assume a grado a grado dalla mente perspicacissima del Viviani diversi aspetti e differentissime forme, ed empie mercè di queste un Volume. In somma ell' è una di quelle tante produzioni sublimi nate in Italia all' età felice del Torricelli, di cui basta leggere poche righe *de Dimensione Parabolae*, *de Solido Hyperbolico acuto*, *de Cycloide*, *de Cochlea* (MDCXLIV.) onde rimanere incantato dal fiore della giocunda e ricca sua Sintesi, imitata dall' emulo e geloso suo Condiscepolo.

## PRINCIPIO UNICO.

„ L' area d' ogni Settore centrale d' Iperbola conica o Ellisse (compreso anche il Circolo), divisa egualmente da „ uno de' suoi trasversi diametri, e supposta grave e *librata* „ intorno al diametro conjugato, equipondera all' area di quel „ Triangolo rettilineo centrale dal lato opposto dell' istesso „ diametro di *librazione*, il qual Triangolo abbia per base „ quella porzion di tangente staccata dal vertice del trasverso, e determinata nella sua lunghezza dalle due parallele „ al trasverso medesimo condotte dai punti estremi dei Raggj circoscriventi insieme coll' Arco il Settore „.

(Vedansi le Figure 1, 2. alle lettere ABCD e LBM. Si tace della Parabola Apolloniana poichè ella è il *limite* della Famiglia delle Ellissi, e per esserne il termine ultimo le si applica colle debite modificazioni la stessa Teoria; ed è perciò che a differenza delle due altre Sezioni del Cono si riduce a *Quadrato*.)

Da questo sol fonte si diramano facili e naturali le Proposizioni del Libro primo, che ora trascelgo come le meno ovvie e più astruse e men idonee a trattarsi senza il presidio della possente *ageometrica* Analisi de' Moderni.

1. Dunque il Centro di gravità F dell' area d' ogni Settore taglia talmente il suo intermedio semidiametro che sia DB a BF come il *sesquialtero* della stess' area a quella del qua-

drilatero ( saliente ) ABCD: così vale del Centro di gravità R dell'opposto Settore *integrante*, cui ABCI è il quadrilatero *ascritto* ( *rientrante* ).

2. Preso perciò un Settor Circolare, o minore o maggiore del Semicircolo, vien diviso l'intermedio semidiametro, come sopra, dal Centro di gravità nella ragione dell'Arco al *subsesquialtero* della sua Corda; lo che non ha luogo nelle due Coniche in generale, perchè la *rettificazione* dell' Iperbola e dell' Ellisse da tutt' altro dipende che dalla sua *quadratura;* la quale scambievole dipendenza all' incontro è propria del Circolo.

3. Sapendosi altronde colla Dottrina delle Coniche determinar di leggieri un Settore ellittico *analogo* ( salvo gli archi ) ad un circolare in tutti i rapporti, i due loro Centri di gravità divideranno proporzionalmente il semidiametro del primo, comunque diverso dai semiassi, ed il raggio dell' altro; a segno che, senza più pensare a quell' area e quadrilatero del N.° 1, si sustituiranno l'arco e la corda del N.° 2. sussegnente: le aree di questi Settori *analoghi* sono sempre proporzionali all' intero delle respettive Figure; utilissima deduzione.

4. Premesso ( Fig. 3. ) in qualità di Lemma cogli aggiunti suoi Corollarj, che il *momento* della tangente GF, in due parti eguali divisa dal contatto C colla Circonferenza d' un Circolo, pareggia il *momento* dell' altra tangente IH, non divisa ancor essa pel mezzo in A suo contatto, poichè la prima in ischiancio, la seconda parallela all' asse di librazione BS, e che il *momento* della tangente GF a quel della corda ML sta come i respettivi quadrati delle loro lunghezze mentr' equiponderano riferite alla detta Libra le aree dei due Triangoli FEG, HEI quando i *momenti* dell' aree dei due simili FEG, LEM han la ragione dei cubi delle respettive parallele lor basi, e generalizzate con tutta destrezza tali proprietà identiche ( Fig. 4. ) a' Poligoni regolari d' ogni sorte circoscritti ed inscritti, si passa a concludere l' equiponderanza dell'arco ( Fig. 5. ) LCM tramezzo ai Poligoni colla retta tangente HI, e del Settore LEMC all'opposto Triangolo così

librato HEI; e provando ora il Metodo delle *esaustioni* o de' *limiti*, ora il Cavaleriano dall'A. detto *aureo*, si termina col bel Teorema dell'essere il Centro di gravità dell'Arco d'un Circolo in quel punto del Raggio di mezzo (dal colmo o polo al centro), che lo spartisce (Fig. 6.) di maniera, che sia BD a DE come l'Arco alla sua Corda o Sottesa, o come il Settore al proprio Quadrilatero inscritto, o come il Settore al Triangolo inscritto nel caso del Semicircolo, cioè la Semicirconferenza al Diametro.

5. Di quì procede la Circonferenza del Circolo pari alla terza continua geometrica proporzionale dopo la distanza dal Centro di figura del Centro di gravità della Semicirconferenza (cadente nel punto *mirabile* della Quadratrice del Greco Dinostrato o Diocle, punto chiamatosi falsamente da Montucla a pag. 100 del Tomo II. l'*origine* della Curva come se non proseguisse colla stessa organica legge più sotto) e il Diametro, ovvero il Quadrante alla terza proporzionale dopo la distanza medesima e il Raggio, come ancora qualunque siasi Arco di Circolo eguale alla quarta proporzionale dopo quella distanza, il raggio, e la corda, e viceversa; d'onde il Triangolo ed il Quadrato eguale al Settore ed al Circolo intero (armonia, fraternità, rispondenza espressa e particolarizzata in più modi quasi gareggiandosi l'uno l'altro per l'eleganza - *sic conjurant amicè* -): di quì a Corda eguale all'Arco interno concentrico del Settore, condotto pel Centro di gravità, e perciò i due interni Archi concentrici, varj di raggio, attinenti a due Settori *di complemento* del Circolo intero eguali tra loro, avendo essi comune la Corda; e posto che fossero ciascheduno Semicirconferenza del medesimo Cerchio, l'unica interna Circonferenza concentrica doppia del Diametro di quel Cerchio: di quì il Centro di gravità di tutto il Perimetro d'un Semicircolo situato sul Raggio perpendicolare al Diametro, ma in tal punto, che lo divida, partendo dal vertice, come la Semicirconferenza al Diametro; il Centro di gravità nella freccia (*sagitta*) d'un Arco è situato nel taglio di essa, contan-

do dal colmo ossia andandosi dritto verso del centro, che la divida nella ragione della differenza tra l'Arco e la Corda alla differenza tra quest'ultima e la quarta proporzionale geometrica dopo la distanza del centro dell'Arco da quello di gravità, il catèto, e la corda, laonde il taglio riesce nel Raggio rispetto alla Semiperiferia come la differenza tra essa e il diametro a questo diametro: di quì finalmente spigolando rincontrasi or quà or là qualche seme o fiore caduto nella prima Raccolta di tanta messe, come, a modo d'esempio, che il Centro di gravità F dell' Arco ABC divide talmente la freccia BE nella ragion del Rettangolo (Fig. 7.) della somma delle tangenti AG, GC nella differenza tra l'arco e la corda al Rettangolo della corda AC nella differenza tra la somma delle tangenti estreme e l'Arco interposto; ed oltre a ciò, che FD fra i due Centri a DE ha l'istesso rapporto di AG ad AB, ossia del Bilineo AGC all'Arco frapposto: nè manca tampoco di qualche sapore geometrico la nuova general Proporzione scoperta risguardante all'Arco d'un Circolo (Fig. 8.), cioè, posto D il Centro di figura, E quello di gravità o Centro delle distanze dall'ipotetica Libra, BE : EG : : ABC - AC: quarta proporzionale dopo ED, DG, AC; laonde nel Semicircolo la quarta proporzionale annullandosi come DG, torna in chiave il detto di sopra BE' : E'D : : A'BC' — A'C' : A'C', dedotto adesso come mera specialità da un generale Teorema.

6. Assuefatto Viviani sin dalla prima sua giovinezza a *geometrizzar* con gli Antichi si provò ancora a sciogliere, e secondo lui vi riuscì, in siffatta materia, che aveva tra mano, da ogni vincolo di dipendenza dal *Tetragonismo* dell'aree delle Coniche l'argomento da lui quì trattato; ed intanto fece un passo più ardito, e fu quello di chiamare a soccorso gli *Indivisibili* (MDCXXIX.) mediante il sagacissimo divisamento, segnato nella 9.ª Figura, di far dipendere dai Centri di gravità E, I de' simili Archi concentrici, in cui si vuole che si risolva il Settore ABCD, e dal Centro di gravità conosciuto L del Triangolo *analogo* in tutte le sue parti com-

parative MBN quello dell'area del Settore, che si ricerca, e coincide nella Libra BD maravigliosamente coll'ultimo. Giova quindi all'A. considerar l'accidente del Centro di gravità d'un Settore, il qual Centro cada appunto nel mezzo della sua Corda; e trova che $\frac{4}{3}$ della tangente del di lui Semiarco s'agguaglia all'Arco intero del dato Settore: si avanza, e nella (Fig. 10.) divide inegualmente la circolare Circonferenza; della porzion minore del Circolo segna G Centro di gravità, F della maggiore, e conduce la tangente BI sin che incontri il diametro prolungato; e prova che il Segmento minore BCH sta al maggior rimanente BAH come DF. GI a DG. FI, dai due Centri contando per ordine inverso: non sazio ancora s'inoltra, e l'apparente sterilità del suo Tema lo stimola anzi viemaggiormente a ricrearsi l'animo col disotterrare nuovi tesori, rammemorandosi come presenti alla vigorosa sua fantasia le Geometriche cotanto amene falcate *Lunule* ossian *Menisci*, e più in generale gli *Arbèli* ( *Scalpri sutorii* ) conformati a foggia di Scuri, Accette, Ascie o Bipenni. E tanto penetra addentro di questa doviziosa miniera, discorsa in rimotissima età ( V. Secolo av. Cristo ) da Ippocrate non di Coo ma di Chio, non da Enopide come dettava l'Heinio, da Archimede nei *Lemmi*, da Proclo il Successore ( *Diadochus* ), e da Pappo nel Libro IV. delle sue *Collezioni*, e dopo rinate in Europa le Lettere lavorata da Vieta, De Lyonne ( MDCLIV. ), Tschirnhausen, Perks, David Gregory, Wallis, Clairaut, Cramer, Lambert, Whiston, Bourand, come ricavasi dal breve Racconto storico fattone nel Testo e Note d'una *Lettera* a Lorgna dalla pag. 323 a 329 del Tomo VII. Sez. III. degli Atti e „ Memorie „ della Soc. It delle Sc. referendosi alla Fig. II. della Tav. VIII., che nel raccorciare ed ingentilire le Prove a generalizzar le Dottrine parziali già conoscinte, ed a disporle in buon ordine, s'abbattè in nuove gioje, ricolsele premuroso, e ne fece dono ai Geometri colla seguente Giunta.

AP-

## APPENDICE.

Distingue gli *Arbèli* (Fig. 11.) pei loro *nodi* o in mezzo o di fianco, in isosceli o equicruri e zoppi o scaleni, in quei formati da tre Semicircoli o da tre *simili* Porzioni di Circolo; ed aggiunge l' Ellittiche Lunule fatte coll' istesso artificio delle Ippocratiche (Fig. 12.), e parimente senza fatica ed a sola vista per sottrazione d' uno Spazio comune *quadrabili*, e fornite di contatti e rigoglio alla pari dell' altre d' origine Greca. Basta che la Semiellisse BCDE abbia per compagno il Quadrante d' una seconda Ellisse BFDA col centro in A distante dal centro E quanto il vertice C, perchè la Lunula BCDF sarà uguale al Triangolo equicrure BAD, i di cui lati sono due Semidiametri conjugati d' egual lunghezza.

Fino da' suoi primi studj posseditore della Geometria degli Antichi giudicava a ragione esser di poco momento il trasformare un Parallelogrammo rettilineo nell' *equivalente* Parallelografo ad Archi di Cerchio, opposti i concavi ai convessi ed eguali a vicenda: giuochetto empirico inconcludente, e nulla onorevole per la Scienza. Mentr' ei nomina Archimedèi gli equicruri e scaleni generati da Semicircoli, chiama Arbèli *suoi* i combinati a minori porzioni, sì diritti che zoppi, citando con laude a tal proposito il Vieta e lo Slusio; quello nel Capo XI. del Libro VIII. *Variorum de Rebus Mathematicis Responsorum* col titolo *De Arbèli et Lunularum quadratione*, ed altrove nello *Zetetico* o Quesito del IV. Teorema per mezzo delle *Sezioni angolari;* questo nel Capitolo IX. de' suoi *Miscellanei*. Fedele alle citazioni addotte imprende soltanto di ridur facile la costruzione assai complicata della *primaria* Lunula di Vieta, contenuta tra gli Archi circolari AOB, ANB impostati sulla medesima Corda, come apparisce dalla (Fig. 13), e quivi descritti nella maniera chiaramente delineata, H, I essendo i centri, e $CD^2 = \frac{1}{3} AC^2$,

e lo Spazio *lunulare* APFOLQBNA agguagliandosi a quello del Quadrilatero AFLB, dalle quattro Corde AF, FL, LB, BA circoscritto. Conceduta in ultimo la piena onoranza dell'inversione allo Slusio (come *ingegnosissimo* a quest'effetto di verità storica da Viviani citato) egli solamente s' accinse a riformare e confermare ad un tempo la da lui data determinazione del Centro di gravità della Superficie della Lunula Greca, perchè indirettamente e troppo di lontano dedotta dalle proprietà de' Solidi di rivoluzione *annulari*, ora col metodo vecchio *negativo*, ora col *positivo* novissimo degl' *Indivisibili* al subjetto applicate. La (Fig. 14.) appresenta la Lunula, di cui nel Libro I. *Physicorum* parlò ancora Aristotile, e stabilisce il suo Centro di gravità G sopra AC tanto distante da A quant' è la lunghezza di BRC, metà dell'Arco esteriore; di modo tale che divide la Freccia CF della Lunula lasciando al colmo CG la differenza tra il Diametro e il mezzo della Circonferenza esteriore, e all' estremo GF la differenza tra la stessa metà della Semicirconferenza esterna e la sua Corda, eguale al Raggio del Quadrante interiore, o in altri termini equipollenti, le due distanze di G dal vertice dell' Arco esteriore e dal suo centro E, cioè CG:GE::AC—BRC:BRC—EC, e CF ch' è l'intera Freccia della Lunula istessa = CA — CB = alla Somma delle due Differenze suddivisate. Oltracciò il Triangolo rettilineo BGD uguaglia il Segmento BFD; e la metà di quel Triangolo ossia BGE pareggia il Segmento BRC; e tutta la dimostrazione di queste conseguenze specciose consiste nel raddoppiamento quì figurato del Semicircolo e del Triangolo, nel segnare l' altro Triangolo AIL d'egual *momento* del Quadrante maggiore ABFDA, come ABD minore in riguardo del Semicircolo attorno alla Libra MN, e nel dedurre con apparecchio sì semplice l' *incognito* Centro di gravità della Lunula dai *cogniti* del Semicircolo e del Triangolo.

Non pago ancora Viviani delle sole precedenti carezze adattate alle indagini altrui somministra del proprio la maniera d' accertare ove sia nella Freccia dell'Arco di fuori di

qualsivoglia *Arbèlo* il Centro di gravità del Perimetro del medesimo, o sia l' *Arbèlo* isoscele o scaleno, di Semicirconferenze o Archi minori composto. Nell' Isoscele *a punto fermo* e nell' altro ad archi *scemi* ( Fig. 15 ) il Centro di gravità N prende i tre quarti della distanza cognita DM del Centro di gravità M dell' Arco esteriore dal *Nodo*, e divide in mezzo MO; che però nel vero Archimedèo ( non *Proculiano* come piaceva dirlo a Vieta ), ossia di tre Semiperiferie, tutta la Freccia BD sarebbe a DN nella ragione della Semicirconferenza esteriore ABC a tre quarte parti di AC sua Corda o Diametro. Non ha bisogno di prova che quanto s' aspetta all' Arbèlo scaleno, o semicircolare o *scemo*, il Centro di gravità N del Perimetro sia nell' uno e nell' altro sulla linea del maggior *sesto* o rigoglio dell' Arco massimo o esterno, e come si verifica degli equicruri divida in mezzo la retta OM determinata dal punto d' incontro della Retta IL condotta dai Centri di gravità dei due disuguali Archi minori qual linea di congiunzione. Indi passando a notare il Centro di gravità della Superficie d' un Arbèlo, pieno o scemo, purchè equicrure, esso riposa nel punto N' lontano dal Nodo D quanto importa sulla Freccia la parte della medesima contata dal Nodo stesso, che sia *sesquialtera* della distanza del centro di gravità del maggior Semicircolo dal Nodo sopraccitato. D' onde nasce la conseguenza veramente inaspettata, che con qualche ragione dir potrebbesi un *Paradosso*, vale a dire che se l' *Arbèlo* sia lo schietto isoscele d' Archimede, circoscritto da tre Semiperiferie circolari, combinano allora nel medesimo punto o coincidono i due Centri di gravità della Superficie dell' *Arbèlo* e della Semicirconferenza o suo filo e taglio esteriore. In fine l' A. risolve il Problema di ricavare da qualunque dato Segmento *scemo* di Cerchio *Arbèlo* sì fatto, alla Superficie del quale abbia l' Area di quel Segmento un' assegnata qualsivoglia ragione di maggiore inugualità, purchè sotto la *dupla*, ch' è il *Limite* o il *Maximum*, qual si verifica nell' *Arbèlo* equicrure.

Or s'apre alla vista uno spettacolo del tutto nuovo d' infinito novero d'*Arbèli* equicruri, non solo nel loro intero perfettamente *quadrabili*, ma divisibili ancora in altri innumerevoli, capaci ciascuno di geometrica *quadratura*. Viviani imita in questa novità d' argomento l' istesso destro, l' arte medesima, che adoperò nel far nascere dalla sua primaria *Volta-a-vela quadrabile* o Fiorentina, cavata dall' Emisferica, altre Volte o Cupole secondarie, terminate tutte da altrettante Spirali sferiche, già avvertite e misurate da Pappo. E difatti l' *Arbèlo* massimo o pieno circondato da quattro eguali Quadranti (Fig. 16.) ha un' Area pari a quella del Rombo-Quadrato circoscritto dalle lor corde, ed il nodo o *peduccio* il più basso possibile: ciascun *Arbèlo* secondario, segnato con Archi sempre del medesimo Raggio, i cui Centri posano su i due Quadranti del ripetuto inferior Semicerchio, il *Nodo* sale sempre più in su lungo la Freccia e finisce nel Centro del gran Circolo quando s' intersecano *a sesto-acuto*, o in guisa d'Arco *Teutonico*, i due Quadranti scambievolmente rovesci, e n'esce l' ultimo *Arbèlo* a quattro uguali Sestanti, ch' è quello unico chiamato suo dal Vieta; ciascuno di tali *Arbèli*, diceva, equivale in Area al Rombo-obbliquo chiuso dalle quattro corde degli Archi proprj, ovvero alla metà del rispettivo Rettangolo, di cui la Corda sia base, altezza la Freccia. Osservabile altresì sembra la prerogativa di tutti gli *Arbèli* di simil genesi e forma, cioè d' essere il perimetro cumulato delle sue gambe eguale al perimetro scempio della sua base, sì come avviene, a malgrado dell' assai diversa configurazione, negli Isosceli Archimedèi e a lor simiglianti. Non difficile è poi a concepirsi la seconda particolarità che ognuno dei nuovi *Arbèli* si scinda in altri *Arbèli* senza numero storti o scaleni, i quali hanno i lor *nodi* sull' una o l' altra delle due gambe del *massimo Arbèlo*, il perimetro esterno uguale all' interno, e la Superficie che agguaglia l' Area del Romboide, i cui lati sono le Corde degli Archi opposti.

Si fa manifesto dallo scrupoloso contegno da Viviani te-

nuto nell' attribuir puntualmente ai Matematici predecessori o coetanei i loro particolari ritrovamenti, quanto faccia mestiere essere in giorno con aver sempre presente la Storia del progredimento delle Scienze naturali e severe. Subitochè venisse posta in osservanza perpetua tal Massima da tutti i Cultori delle medesime Discipline, non si sarebbe dato per aneddoto nuovo essere la *Famigliar* Curva proteiforme del Gregory l' istessa della Cassiniana di Malfatti, dell' Isocrona di Bonati, e della Lemniscata di Bernoulli e Fagnani ( ch' ei volle incisa sul suo Sepolcro ) dal Saladini nel MDCCCIV tra le „ Memorie „ della Parte II. del Tomo I. pag. 43 del Instituto d' Italia quando nel MDCCXCII. s' era letta tal intima cognazione nell' Opera *De Calculo Integralium Exercitatio Mathematica* ( pag. 206, ov' è ancora aggiunta una *Spirica* ); nè Pollini nè Belli avrebbero tolta, il primo nel „ Catechismo Agrario „ non ha guari stampato l' unica e vera maniera di Piantagione regolare in esagoni al Tomo VI. degli „ Atti „ de' Georgofili di Firenze ( pag. 259, ediz. del MDCCCI ) senza citarlo, l' altro nel Volume IX. de' Fisiocritici ( pag. 255. ediz. del MDCCCVIII. ) all' Opera *Magnitudinum Exponentialium* ec. MDCCLXXXII. l' original disviluppamento delle Potestà trascendenti od *esponenziali*. Anacronismo o tacito plagio parimente sarebbe quello di non accordare a Villalpando nei suoi „ Commentarj „ al Profeta Ezechiele ove illustra il famoso Tempio alzato in Gerusalemme dal Re Salomone, o a Grienbergero la prima descrizione di quella Curva, che più s' avvicini alla natural Sezione dell' Uovo, ma d' ascriverla a sè o a Teofilo Bruni, il quale avanti d' ogni altro, dedottala dall' Istrumento di Platone o di Diocle a squadre scorrenti per isciogliere il Problema di Delo, la divulgò nella Parte seconda ( MDCXXXI ) della sua „ Armonia Astronomica e Geometrica „ scoprendone alcune delle di lei proprietà singolari, perocchè oltre ad essere la *Mediatrice*, così nominata come idonea a trovare due Medie proporzionali, ha l' Ordinata *massima* eccentrica, o il colmo ed auge della Curva

fuor del suo mezzo, come nel mio *Lemnisco* o Galano, una delle tre *projezioni* ortografiche e segnatamente trascurata della Volta-a-vela alla Fiorentina, ma non già la falsa *quadratura* da lui pretesa nel III. Teorema, laonde dette campo a Viviani d'assegnare in calce della „Continuazione del Diporto Geometrico„ (MDCLXXVI.) tra i *Modi varj* ec. della Ricerca delle due Medie e della Trisezione dell'Angolo (pag. 281. Fig. X.) il rapporto da Bruni negletto della maggior lunghezza alla maggior larghezza di 16 a $6\sqrt{3}$, ed allo Scrittore dell'Opera sopraccitata *De Calculo Integralium ec.* d'abbreviarne assai l'Equazione *caratteristica*, e dimostrare ad un tempo (pag. 178-79) che l'Area di questa Foglia od Ovale è $\frac{5}{8}$ del circoscritto Circolo genitore.

Giacchè ho di passaggio rammentato pocanzi quell'Opuscolo di Viviani intitolato *Modi varj* tentati *meccanici*, *lineari*, *e solidi* ec. ec. non saprei mai indovinare come all'avvedutissima mente d'un così profondo Geometra sfuggito fosse l'errore gravissimo (Problema I. pag. 271) che la Superficie del Semicilindro retto (Fig. I.) ABFCDEA sia per metà divisa dal perimetro della Semiellisse BGD del mezzo Cuneo o mezz'Unghia, quando all'opposto è così spartita da una Curva di doppia curvatura (Fig. IV. pag. 273.), vale a dire dall'Elica d'Apollonio o Spirale delle Viti comuni avvolta a un Cilindro. Trascrivo il Testo a stampa (e ne possiedo una Copia, che di man dell'A. appunto sotto il l. c. mi sembra, ma non in questo, corretta) „Quì è manifesto che questo „mezzo Elisse divide la superficie curva ABFCDEA del mez„zo Cilindro in due parti uguali ....„. Lo trascrivo con tutta lealtà, invitato non tanto dalla ragione che dee, specialmente di Valentuomini celebrati per Opere insigni nella Repubblica delle Lettere, dubitarsi sempre che in cose ovvie ed elementali non abbiano errato, quanto (e più fortemente) perchè ricaviamo da più esperimenti polemici lontani di tempo sopra certa curiosa specie di *Paradossi*, i quali com-

parvero nella tentata risoluzione di un Problema medesimo, e riuscita uniforme or camminando per la sua strada, ora per la non sua, tranne la diversità del *segno* nell'ultima Formola che non intendendosi nè volendosi intendere qual fosse in ciò l'idea dell'Autore, ch'ei pure aveva esposta chiarissima in un periodo tramezzo a due altri finali, il quale fu tutto lasciato dal contrario Libretto a stampa, ad onta di sì circospetta e misurata Proposizione insorsero i soliti eccheggiatori che ignoranti del nome stesso d'Analisi Superiore, mercatanti d'estrane voci ( *qui cum nihil de ingenii sui penu depromere valeant*, mal accorti! *alienis laboribus linguae petulantia insidiantur* ), ed affannati e malgraziosi, come gli dipinge Menzini ( Cap. XIII. *de Litt. Invid.*), son tali che poscia ricopiano il fare delle Pecorelle Dantesche, senza por mente che in Componimenti didattici, e massime in Algebra, una parola, anzi una lettera, un numero, un segno, non che un periodo troncato, e peggio se tolto affatto, cambiano di sostanza il soggetto, e quando mai profana penna l'osasse, guasterebbono il senso vero, e porrebbero ancora in contradizione le Divine rivelate Scritture.

Alla Dottrina degli ultimi *Arbèli* mancherebbe la parte *centrobarica*, che dopo la fatta non incongrua digressione va in breve ad aggiungersi riunita e spiegata in tre sole Figure, che rappresentano tosto all'occhio il nesso e i compensi delle respettive *Lentine*.

Primieramente il Centro di gravità I del Perimetro d'uno qualunque di quegli *Arbèli* equicruri ( Fig. 17. ), che ha il *nodo* E, e la sottoposta foglia più o meno grande, la quale s'annulla divenendo un punto di contatto, o vertice d'un *Angolo*, da Galileo chiamato *di contingenza*, nel *massimo*, è talmente posto sopra la Freccia che 4AC ( tutto il Perimetro ): AC+CD ( Corda ) :: AE : EI ; e per conseguente nell'Arbèlo *massimo* come la Circonferenza d'un Circolo al Quadrante insiem col Diametro.

In secondo luogo il Centro di gravità I' dell'Area di qua-

lunque siasi di tali *Arbèli* sta in quel punto della sua Freccia distante dal *nodo* E quanto importa la mezza Freccia coll' augumento o giunta della metà della quarta *geometrica* proporzionale FI dopo la Semicorda CF, AC ( Semibase ) — CF, ed il Raggio GA ; e di quì procede che nel *massimo* di questi *Arbèli* ( Fig. 16. ) la distanza del Centro di gravità I' della sua Superficie dal *nodo* E si risolva mirabilmente all' incontro nella media *aritmetica* proporzionale EI' tra il Quadrante AC ed il Raggio AG: imperocchè mezza Freccia in questo caso *particolare* è EG, la metà della quarta proporzionale suddetta *generica* or si converte in $\frac{AC}{2} - \frac{AG}{2}$ , onde $AG + \frac{AC}{2} - \frac{AG}{2} = \frac{AC+AG}{2}$ , cioè appunto alla sopraccennata Media *aritmetica*: la qual metamorfosi di *geometrica* in *aritmetica* proporzione dal *genere* dell' Arbèlo passando alla *specie o varietà* nell' universale subjetto non lascia di far grata impressione nell' animo di chi è avvezzato a contemplare le meraviglie e le rarità di men aspettate, che dentro di sè contenute a dovizia di quando in quando appalesa la Geometria.

Destinato il Libro II. dei *Centrobarici* menzionati alle Superficie curve ed ai Solidi, vi si considerano specialmente la Sfera colle sue porzioni ed i Coni coi loro tronchi, ma corredando di nuove ed ardue speculazioni questo ormai trito ma non ingrato argomento.

Dopo d' aver detto in principio che il Centro di gravità della Superficie d' una Porzione di Sfera, o *Callotta* o *Berrettino* che piaccia dirla o sia una delle sue *Zone* comprese tra due Circoli paralleli, egli è sempre il punto di mezzo dell' Asse od Altezza, e perciò il Centro di figura quando sia tutta la Superficie convessa o concava della Sfera, passa a suggerire l' A. che contate ancora le Basi della data Porzione la totalità della Superficie della *Lente* sferica piano-convessa ha per suo Centro d' equilibrio quel punto, il qual taglia l' Asse della *Lente* medesima di modo tale che il segmen-

to suo verso il colmo o *polo* stia al rimanente dell'Asse medesimo suddivisato come il resto dell' Asse di tutta la Sfera insieme col Raggio di questa a esso Raggio; e torna tal ragione con quella del doppio dell'Area della Base *piana* unitamente alla Superficie *convessa*, che sovra la Base riposa, alla Superficie ora detta. Dunque in rapporto all' Emisfero il suo Asse o Raggio *polare* resterebbe diviso dal Centro di gravità di tutta la Superficie, che lo circonda, nella dupla ragione così chè due terzi del Raggio guardino il *polo*, ed il terzo, che resta, torni dalla parte del centro della circolar Base dell' Emisfero. Prende origine dalla determinazione spiegata l' *Analogia* tra il Centro di gravità d' un Arco di Cerchio e l' altro d' uno sferico Berrettino considerato pel solo convesso: conciossiachè il primo Centro taglia il Raggio in maniera che tutto stia alla parte verso il centro del Cerchio come l' Arco alla Corda, che gli serve di Base; il secondo lo taglia come la Superficie convessa al Circolo, che n' è la Base.

Ma l' eleganza dell' *Analogia* discoperta, stata nascosa ai Geometri dell' età trapassate, dee cedere a quella, che nasce dal Teorema consecutivo, il quale stabilisce esser sempre uguali tra loro i *Momenti* della Superficie d' una *Callotta* o d' una *Zona* sferica o corrispondente pari nel circoscritto Cilindro, e del Circolo base icnografica della *Callotta* o dell' Armilla, base, pianta icnografica o *projezione* ortogonale di quella *Zona* convessa relativamente al Diametro della Sfera parallelo alla base predetta, supposto l' Asse di *Librazione*. Anzi assai più generale diviene questa maravigliosa proprietà d' imaginata equilibrazione, estendendosi dessa ancora alle accidentalità innumerevoli che la Base della *Callotta* non torni parallela al piano, su cui si *projetti*, e l' icnografia o *projezione* o pianta di quella Base si cambi in Ellisse. Oltre di che, comunque segnata a piacimento sulla Superficie d' una Sfera una parte minore dell' emisferica, o regolare o irregolare, circoscritta da una linea curva condotta comunque a mano, a capriccio, ec. di chicchessia, come, a causa d' esempio, il Confin d' un Imperio, di un Regno, d' una Provincia, ec. ec. ec.

delineatasi sopra un Globo Terrestre o Geografico, riuscirebbe sempre l'uguaglianza immancabile dei due *Momenti* referiti alla medesima *Libra*, e perciò l'equiponderanza, in virtù di questa Meccanica astratta, sostenendo il centro del Globo. Di più la *Pianta* dell'Italia, dell'Europa, ec. nel suo vero e reale fisico Orizzonte *convesso* (si prescinda dalla non assoluta *sfericità* della Terra) peserà sul centro del Globo quanto puntualmente contrappeserebbe la sua *projezione* ortografica (supposta grave) sovr'altro *piano* Orizzonte, comunque obbliquo o inclinato a riguardo del primo .... Ma non finirebbesi mai se tutte dinotar si dovessero le illazioni da questa nuova ferace Dottrina conseguitanti, richiamandovi a trarle la perspicacia dei risoluti Analisti, i quali presto sapranno ottenerle e raccoglierle meditando sulla (Fig. 18.) ove EFG è la *Callotta* o Parte qualunque di Sferica Superficie, H il Centro della Sfera, NO il profilo del Piano di *projezione*, I il Centro di gravità della prima alla metà della Freccia, Q quel della *Projezione* (se *Callotta*, ec.), e la curva Superficie alla sua Pianta come all'inverso PQ ad IM ..... Procediamo senz'altro indugio ai Settori sì sferici che loro *omologhi* sferoidali, pertinenti a Ellissoide oblongata o compressa. Equipondera parimente ciascun Settore solido minore dell'Emisfero col contrapposto Cono retto (Fig. 19.), bilanciati in diritto dei loro Assi, come ABCDA, FBHEF, sul centro B della Sfera. Lo mostrano immantinente gl'*Indivisibili* retti ed arcati; e si verifica dietro all'istesso Principio nei medesimi Settori sferici quando avesser per Base qualunque si fosse comunque configurata porzione di Superficie sferica (purchè non maggiore dell'Emisfero) quello stesso *libramento* a bilancia, impostato sotto qualsisia angolo nel Centro della Sfera, o col Cono ellittico contrapposto, o col Cono parimente in contrario, avente per Base la Pianta o Icnografia della Base appartenente al Settore.

Gettate queste saldissime fondamenta agevol riesce l'invenzione del Centro di gravità d'un Settore sferico o mino-

re o maggiore dell' Emisfero. Basta per riconoscerlo divider l' Asse del dato Settore in modo che l' Asse suo intero ( o Raggio della Sfera ) stia alla sua parte verso la punta, oppur vertice, come il *sesquiterzo* della convessa Base del Settore all' Area del Circolo, su cui quella è impostata, o in altri termini come quattro Basi a tre Circoli, o come la Base a tre quarti del Circolo a lei sotteso: graziosissima simiglianza al Centro di gravità d' un Settore di Circolo, il qual Centro, pel già detto di sopra, divide il Raggio o Asse centrale nella ragione dell' Arco ( sua Base ) a due terzi della sua Corda ( o Sottesa ), onde si cangia da Settor piano a Settor solido il Rapporto del *coefficiente* $\frac{2}{3}$ del secondo in quello di $\frac{3}{4}$ del primo, cresciuto d' una unità tanto il *numeratore* quanto il *denominatore* della prima Frazione. Consegue da ciò chiaramente 1.° che il Centro di gravità d' un Settore sferico è distante dal suo vertice o centro della Sfera, alla quale appartiene, per tre ottavi dell' Asse attenente alla Superficie sferica, complemento della Base del Settor dato a fin di comporre l' intera sferica Superficie; - 2.° che i Centri di gravità di due Settori complenti a vicenda la Sfera distano parimente uno dall' altro per tre ottavi del di lei proprio Asse; - 3.° che il Centro di gravità d' un Emisfero si dilunga dal Centro di figura quanto importano i medesimi tre ottavi del Semiasse o del Raggio; - 4.° finalmente, che i tre ottavi, ripetuti di sopra come Numero di rispetto, equivalgono nel caso secondo a $\frac{3}{4}$ del Raggio ( *esponente* della Ragione *subsesquiterza* ) duplo di $\frac{3}{8}$ ( *esponente* della Ragione *subduplasubsuperbiparzienteterza*, stando al vecchio stile della nomenclatura del V. d' Euclide. L' istesso vuol dirsi ancora delle Sferoidi e d' ogni solido loro Settore, siccome innanzi ho avvisato.

Sapevasi da lungo tempo il Centro di gravità d' un Co-

no ove fosse, ma non già il posto di quello della *retta* Superficie convessa. Viviani non omette accennare che dai MSS. del Torricelli apparisce averlo egli trovato mercè dell' *analogia* che la Superficie Conica *retta* ha col Triangolo rettilineo, maneggiando amendue alla maniera Cavaleriana; tuttavia seguendo l' istesso metodo, precursor dell' *Analisi degli Infiniti*, l' assegna ancor ei nel punto dell' Asse, che lascia il suo terzo verso la base, avvertendo in due modi diversi non solo al Triangolo *analogo*, ma più sottilmente a due combinati Coni solidi *retti*.

Qualora s'attenda in un Settore sferico non tanto alla base, sulla quale insiste, ma altresì alla Superficie del Cono, che termina il di lui vestimento, le due Superficie convesse, prima Sferica della base, seconda Conica, o convessa o concava (comune a due Settori) colla punta nel centro della Sfera, stanno tra loro (Fig. 20.) nella ragione dell' altezza o asse CF della Base, in quanto spetta al Settore BEDC, e AF in quanto al Settore di complemento DEBA al semiraggio $\frac{BF}{2}$ del Circolo, che separa le basi dell' uno e dell' altro Settore, o come BF a $\frac{FC}{2}$ nel secondo caso, e BF : $\frac{1}{2}$AF nel primo.

Superba è poi la Proposizione or aggiunta, e piena di sagacissimi Corollarj.

Posto un Settore sferico minore dell' Emisfero, ma tale che l' Asse AF del suo Cono *retto* BAD (Fig. 21.) sia *sesquialtero* dell' altezza FC della base o porzione sferica del Settore, questi avrà le doti tutte o prerogative enumerate quì appresso.

1.° Sarà il Settor così scelto subquintuplo di tutta la Sfera, cioè CF un quinto del di lei Asse.

2.° La parte di Superficie sferica, ch' è base di esso, eguaglierà la Superficie conica, che lo veste.

3.° E perciò, suddiviso il Settore nei due suoi compo-

nenti, tanto il Segmento sferico, quanto il Cono retto saranno *isoperimetri*, considerata l'integrità delle lor Superficie.

4.° Verrà ad essere il Settore di complemento *sussesquiquarto* di tutta la Sfera; ma, ciò che più importa, *isoperimetro* della medesima.

5.° Il Centro F del Circolo di riunione del Segmento e del Cono sarà il Centro di gravità del Settore.

6.° Più: sarà ancora F il Centro di gravità della Superficie intera di esso Settore; cosicchè coincidano in uno i due Centri di gravità del contenuto e del continente.

7.° A malgrado d'essere *isoperimetri* i due spartimenti del Settore proposto, non son però uguali di mole: il Segmento sferico al Cono collegato con lui sta come 13 a 12, e come 13 : 125 rispetto a tutta la Sfera.

8.° Nè tra gl' innumerevoli Settori minori dell'Emisfero alcun altro vi potrà essere, il quale abbia riuniti in un punto solo i due Centri di gravità nei Numeri 5.° e 6.° divisati, che sia Centro del Cerchio ivi indicato.

9.° Finalmente in riguardo ai Settori più piccoli dell'Emisfero, ma men d'un quinto di tutta la Sfera, la Superficie sferica è sempre minor della Conica; e viceversa maggiore se più d'un quinto, che tra il più e 'l meno diviene il *limite* unico dell' uguaglianza.

Se dunque nei Settori minori della quinta parte della Sfera sì il Centro di gravità del Volume sì quello del suo Contorno sta sotto il Centro F della Base circolare, comune al Segmento ed al Cono, verso del vertice A, ed al contrario nei maggiori sta sopra F verso di C ossia del *polo*, evvi luogo a questa Domanda. Ci sarebb' egli mai nella Sfera altro Settore, della cui Solidità e Superficie amendue i Centri di gravità riducansi ad unico e medesimo punto contuttochè questo non sia, come nel *subquintuplo*, il centro del Circolo base comune, che giunge insieme il Segmento e il Settore? Sì; il diciassettesimo della Sfera (*subseptemdecuplo*), che tro-

vasi agevolmente prendendo CF, in iscambio di $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{17}$ dell' Asse CA; divisione, che non ha certo le stesse difficoltà come quelle per inscrivere un Poligono regolare di diciassette lati nel Cerchio mediante l' ingegnosissimo ritrovato di Gauss.

Sono peraltro di minor numero a paragon del *subquintuplo* e meno vistose le proprietà, che a questo Settore, unico anch' esso nella sua prima qualificazione seguente, competono.

1.° Della sua Mole e della sua Veste il Centro di gravità cade in un punto comune sull' Asse, ed è quel punto, che divide l' Asse del Settore dal vertice al *polo* come 12 a 5 (in ragione *duplasuperbiparziente quinta* all' antica), a differenza del superior Numero quinto.

2.° In questo caso la Superficie conica del Settore doppia è della sferica, a differenza del superiore secondo Numero.

3.° Sta il Settore al suo Cono come 289 a 240; il Segmento al Cono come 49 a 240; il Segmento medesimo, o *Lenté* piano-convessa a tutta la Sfera come 49 a 4913: relazioni tutte *razionali*, e Corpi tutti in fra loro *commensurabili*.

Arròge che in ultimo caldo il Viviani de' suoi peregrini concetti, e fatto lieto ed ardito a motivo di cotante e sì felicemente riuscite invenzioni somministrategli dalla ben condotta sua Sintesi, interrogò, sempre impaziente di cose nuove, sè stesso dicendo: Avrebbevi forse nell' immenso numero dei taglj possibili d' una Sfera qualche Settore più grande dell' Emisfero, della cui Veste il Centro di gravità cadesse nel Centro istesso di gravità e di figura di tutta intera la Sfera? Eccolo (Fig. 22.); l' ho trovato: per mezzo della tangente $DF = \frac{2BD}{3}$ si faccia BL *sesquialtera* di LA: il Perimetro, che ricinge tutto il Settore BCOEQAB, ha di certo il suo Centro di gravità in B, Centro di tutta la Sfera e per contorno e per mole; ed è questo il Settor unico sì fattamente distinto.

Non parrebbe che dovess' esser, come tentandola per prova ella è, più scabrosa in un Cono *retto* simil ricerca de' due Centri di gravità della total Superficie e della intera Solidità riuniti in un punto. Pure un Cono *retto*, il cui lato sia triplo del raggio della sua base (e dee dirsi l' istesso d' una qualunque Piramide poligona regolare quando il *catèto* o *apotèma* della faccia-triangolo sia triplo del *catèto* del poligono-base) è, sebben unico tra tutti i possibili, quello, che soddisfà a tale inchiesta. Imperocchè nello Spaccato o Profilo segnatosi colla 23.ª Figura, prendendo DE quarta parte, DF terza dell' Asse BD, il primo punto E mostra il Centro di gravità del Cono, F della sola convessa sua superficie, D quello della piana sua base, terza parte della Superficie convessa; laonde DE essendo tripla di EF (due *Bracci* di Lieva all' inverso), e perciò pareggiandosi i due *momenti* della Superficie conica e della Base, si bilanciano in E come tutto il Cono ABC: e di questa coincidenza d' entrambi i Centri la Stereometria universale, oltre a molti altri solidi che dà in esempio, cioè le Forme parallelogramme, prismatiche, cilindriche, Sferiche, sferoidali, e tutti quei Poliedri regolarmente o simetricamente ordinati, i quali si generassero dalla ruotazione di Poligoni adscritti, inscritti, o circoscritti al Circolo, all' Ellisse, ec. intorno ad Assi comuni, appresenta ancora in aggiunta Modelli di Corpi appuntati o di desinenza diversa più o men cuspidati o a meglio dir rotondati ai termini de' proprj Assi, a differenza dei Settori e dei Coni testè contemplati. Rispetto a questi ultimi merita d' essere esposta all'occhio geometrico l' altra notevole circostanza, che ciascun di loro secandosi con un Piano GH parallelo alla Base AC, il quale passi per E, punto d' union dei due Centri, restano proporzionalmente divise la Mole e la Veste tutta del Cono nella ragione medesima, ed appunto nella numerica del 37 al 27; il primo numero o *antecedente* rappresenta il Tronco inferiore, ed il *conseguente* la superior parte, ch' è acuminata e finisce nell'apice. Difatto ABC : GBH (nel Solido) : : 64 : 27.

Dunque intanto AGHC : GBH : : 37 : 27. E rispetto alla Superficie si ha ABC : GBH : : 16: 9, AGHC : GBH : : 7 : 9, ed AGHC+AC: GBH : : 12 $\frac{1}{3}$ : 9 : : 37 : 27, vale a dir come sopra. Chi ulteriormente cercasse qual sia il Centro di gravità della Superficie totale, unita cioè alla convessa la piana d' un Cono *retto*, lo troverebbe nel punto, dove l' Asse rimanga diviso (contando dalla sua cima) come due Lati del Cono con tre Raggi della sua Base a un solo Lato.

Ove più brillano, a mio sentimento, la forza e vivezza del così giovin com' era Viviani (*quinque superiora haec tantum, et quidem insignia Theoremata, a me vigesimum quartum circiter aetatis annum agente reperta, ac demonstrata, multisque postmodum cum Amicis communicata,* pag. 31. del II. Libro del MS.) si fa palese in alcune Proposizioni sommarie concernenti i MAXIMA de' CONTINUI VARIABILI, difficultosi a determinarsi mediante la Sintesi, quantunque facili a trattarsi da Hudde e Schooten in poi all' Analisi algebrica. Ma avanti di farne parola giova di finir la Teoria dei Centri di gravità applicata nell' ultimo Esempio al Quadrante solido d' una Sfera, terminato da due Semicircoli massimi disposti ad angolo retto, che torna a dir circoscritto nel resto dalla quarta parte di tutta la sferica Superficie. Si desidera il Centro di gravità non dell' intera sua Veste, ma del solo Quarto di sferica Superficie convessa, che gli appartiene? Viviani risponde. „ Se tu tagli l' Asse del Solido (ch' è il Rag- „ gio dividente per metà quel Quadrante di Circolo massi- „ mo, il quale divide il *quarto* della Superficie sferica in due „ Triangoli sferici equilateri o trirettangoli) di tal maniera „ che tutto alla parte sua voltata verso del centro stia come „ la Diagonale al Lato di qualunque Quadrato; ivi appunti- „ no sta il *Centro* da te bramato; o segnalo con più agio nel „ punto di bisezione della Corda dell' accennato Quadrante „ di Circolo „ . E dove è riposto l' altro Centro di gravità della Mole dentro dell' intera Veste compresa? „ Dee allor

„ farsi il taglio del Raggio stesso centrale nel modo che se-
„ gue, cioè ancor quì tutto ed una sua parte *incommensu-*
„ *rabili* ( come fu innanzi $\sqrt{2}:1$ ), ma con divisione men sem-
„ plice, perchè dipendente da $\sqrt{32}$, e sempre però dall' istes-
„ so Quadrato. — „ Taglisi il solito Raggio centrale talmen-
„ te che tutto al suo segmento verso del centro stia come
„ la Diagonale medesima d' un Quadrato a tre quarte parti
„ del Lato suo proprio, cioè $\sqrt{2}:\frac{3}{4}$ equivalente a $\sqrt{32}:3$ „
avvertita di sopra. Lo che si dimostra anco in una seconda maniera colla serie di sfoglie di Superficie curve concentriche nel Quadrante, e di Circoli paralleli in un Cono *analogo*, preso qual termine di paragone.

Celebratissima è stata, malgrado chè nei suoi più cospicui particolari poco conosciuta o men voluta conoscersi dagli Scrittori oltre l' Alpi ed il Mare, quella parte di Storia della Geometria, coltivata e promossa molto più in là del sapere dei Greci a noi pervenuto, spezialmente in Firenze all' età felice di Torricelli. In tempo che gli Eruditi e Grammatici di primo grido s' intertenevano e disputavano di Lingue dotte, ed altri di loro interpetravano a gara o volgarizzavano i Classici Greci e Latini, e comentavano ancora le Prose e le Rime dei Fondatori del Volgare Idioma, laddove gli ultimi di grado e di stima si vantavan del novero ben contato dei versi di tutta l'ILIADE. ( 15783 ), alcuni attendevano ad ispiegar lo perchè in certe Colonne Milliarie della Dacia antica, alzatevi da Trajano o in quel torno, ossia Pannonia, Transilvania, Vallacchia, Moldavia presso le foci dell' Istro, il segno $\overline{\infty}$ trovatovi inciso valesse il $\overline{\text{M}}$ Romano, e come il $\overline{\text{I}}$ per Centurione o Centuria v' abbia il significato medesimo della Sigla o Cifra $\Delta$ de' Greci, e molti più dilettavansi di cose frivole o di vane o allegoriche ed alle volte superstiziose quistioni, Evangelista Torricelli nato in Piancaldoli il MDCVIII., vivuto soli XXXIX. anni, era già l' Archimede dell' Etrusca Romagna, non ostante ch' egli sempre ag-

gradisse di nominarsi Faentino perocchè suole amarsi qual Patria il Paese non suo, dove la fanciullezza e l' adolescenza siansi educate nei Rudimenti dell' Arti e dell' amena Letteratura. Tra le preziose, ed ancora inedite di lui Produzioni, dal MDCXLVII. in poi o per imperizia o per gelosia o per invidia o più presto indifferenza o dimenticanza lasciate fuor della stampa se ne ravvisan parecchie di Trovamenti così luminosi che il modo eccellente, il filo sottilissimo del discorso, l'ordine lucido del ragionamento *sintetico*, e ad un tempo stesso la rara concisione, la singolarità e semplicità delle Prove, alla pari, se non ancor più, delle sue Opere impresse nel MDCXLIV., comparirebbero, riportate all' epoca in cui furono scritte, portento d' ingegno a quei medesimi Analisti sommi, pe' i quali usando dell' Algoritmo *analitico* sarebbe scherzo e quisquilia inventare, risolvere, e dimostrare sì fatti Teoremi e Problemi. Mersenno, Niceron, Fermat, Roberval tra i Francesi, Wallis e forse Barrow Inglesi lo laudavano a cielo, e si giovavano della franca comunicazione amichevole di alcuni de' suoi più consumati pensieri. Una scelta di questi spedita ai Matematici Oltramontani circa al MDCXL. e divisa in LIV. Proposizioni si contiene in un suo *Racconto*, rimaso sempre segreto sino alla pubblicazione della di lui Vita Latina citata di sopra, postovi intero com' ultima *Nota*, ed a cui Perelli assistè confrontandolo esattamente coll' autografo del Codice allor Palatino. Contemporanee ai suoi studj e lavori diottrici ed all' invenzion del Barometro insiem col Viviani, la quale in addietro voleva togliersegli da Pascal, ed or dal contesto di due Lettere del Baliani anteriori, ove dice aver egli posto a cavalcioni d' un Monte un Sifone sperimentale ( T. II. p. 106. Tav. VIII. Fig. VI. „ Memorie e Lettere inedite finora e disperse di Galileo Galilei „ MDCCCXXI.), il Valentuomo asserisce essere state le proprie speculazioni sopra i *Massimi* e *Minimi*, ed intorno ai Solidi Vasiformi o Bicchieri Geometrici di varie foggie, dei quali si parla nella Prefazion d'un Filolo-

go alle „ Lezioni Accademiche „ innanzi allegate; coll' error grave però che un gambo di questo o quel Vaso fosse a guisa di Solido infinito *Iperbolico-acuto* in vece di *Parabolico*. Imitatore Viviani e Collega di Studio del Torricelli seguì le sue orme nella stessa spinosa carriera; ed aveva intenzione di produrre alla luce più di trenta anni dopo del Condiscepolo nel Libro II. dei *Centrobarici* i V. tra i principali Trovati, collocandoli in mezzo ai Teoremi XVI. e XVII: imperocchè (egli scrive) *ea nemo, quod sciam ante nos detexerat, ob id fortasse quod nec eadem ante nos perquirenda susceperit;* ben sicuro, che *si quis horum demonstrationes desideret, eas sibi facile comparabit, sic certior jam factus de veritate hujusmodi Conclusionum.*

All' occasione in somma del Centro di gravità di tutta la Superficie, e di quello di tutta la Mole d' un Cono *retto*, concorrenti in un medesimo punto qualora il Lato del Cono sia triplo del Raggio della sua Base, spingendo la considerazione più oltre si rinvennero da Viviani le Verità, che adesso non in lettera, ma in sentimento trascrivo.

I. Quel Cono or or rammentato è il *Maximum* di Volume o Capacità a confronto di tutti gl' innumerevoli suoi *isoperimetri*.

II. Tra i Bicchieri Conici, *Cyathi*, (in passato di moda), ch' abbiano eguali le sole Superficie curve, esteriori o interiori, il *Maximum* di contenenza si è quello, nel quale la *Potenza* o Quadrato del Lato sia triplo del Quadrato del Raggio del Circolo ossia Bocca del Vaso.

III. Dei Bicchieri Cilindrici (presentemente in usanza alle Mense), i quali abbiano eguali le Superficie curve unitamente alle Basi uniche, il pregio del *Maximum* di Capacità fra questi Cilindri aperti tocca a quello, dove il Lato s' agguagli al Raggio della propria sua Base.

IV. *Maximum* di vuoto interno egli è poi privilegio tra i Cilindri chiusi, in totalità *isoperimetri*, di quell' unico, il cui Lato sia doppio del Raggio della circolare sua Base.

V. Archimede avendo provato, che dalle Tazze o Bacini figurati a *Callotte* rovescie di Sfera, ed eguali di Superficie curva convessa, sia il *Maximum* di vano o capacità l'Emisferico, a supplimento di questa Dottrina si dimostra egualmente, che tra le Porzioni sferiche *isoperimetre*, contato ancora il Coperchio della lor Bocca, conviene il *Maximum* a tutta intera la Sfera.

Risulta adunque dal brevissimo cenno, che quì piacque a Viviani di dare ai Geometri qual frutto prematuro de' suoi avanzamenti in esaminar le affezioni delle Grandezze *variabili* nella lor dimensione, quanto presto giunger dovesse, siccome fu, a vaticinare il contenuto nel V. Libro delle *Coniche* d'Apollonio, che sapevasi secondo Pappo ed Eutocio, ambidue Scoliasti, esser dell'istessa materia scientifica da esso lui coltivata: e per consenso dei Matematici tutti lo indovinò di maggior momento, e in alcune parti più profondo del Testo medesimo tradotto dall' Arabo mediante un incompiuto Codice Mediceo dal Maronita Abramo Ecchellense colla scorta d'Alfonso Borelli, ad eccezione delle perpendicolari o *minime* rette da punti fuori dell'Asse di quelle Curve; *minime* dipendenti in genere dalle *Evolute*, e non omesse in particolare dal Geometra di Perge in Cilicia.

Mentre che Viviani occupavasi di queste non ordinarie investigazioni Geometriche, e stendeva e comunicava agli Amici i suoi ritrovati con quel discorso, che copioso ma non ridondante nulla lasciava a desiderare perchè al Leggitore non facesse mestiere ricorrere ad altri, onde capire i di lui insegnamenti, Torricelli era mancato di vita, poco dipoi Cavalieri morto, e Ricci da Innocenzo XI. elevato alla Porpora, e s' erano consegnate sotto sigillo in sustituzion dei due ultimi da Ferdinando II. a Viviani tutte le Carte legate e volanti, che Torricelli innanzi della metà del Secolo, in cui fioriva, ai primi due aveva lasciate raccomandando loro la pena di sceverarle, ordinarle, e se ve ne fossero state degne, produr queste sole tostamente alla pubblica luce. L'E-

secutore testamentario Lodovico Serenai, l' Erede Panzanini, il Gran Duca sollecitarono spesso, ma sempre indarno, Viviani a non privar la Repubblica Letteraria di cotal tesoro, che divulgato subito in tempo avrebbe onorata di più la Toscana per l'anticipazione di molte Scoperte quindi dischiuse in sul cadere del Secolo XVII. mercè della chiave valevolissima del Calcolo differenziale e integrale. Contenevano alcuni di quei Foglj manuscritti Ricerche in parte consimili alle premesse *Centrobariche* Vivianèe; e presero da questa simiglianza di subjetti motivo di sospettare intorno alla vera causa della detta disorbitante tardanza i mal sofferenti la segnalata reputazion del Viviani, tra i quali nominatamente Magliabechi e Borelli. Nel preallegato Volume delle Fabroniane Vitè Latine il Biografo franco scrive *in qua* (re) *gerenda tarditas, et procrastinatio illius* (Vincentii Viviani) *fuit odiosa* (*pag.* 366.); ed altrove (pag. 321.) *a simulatione et astutia non semper aliena natura Viviani, et artes Magliabechii et Borellii, qui quae erant in iis invidiosa, turbulentis consiliis invidiossima faciebant;* ed in ultimo (327) vuole che le Opere del Viviani siano *Scripta plena querelarum, et insolentis etiam ostentationis*. Quando tutto ciò, che viene apposto al grand' Uomo, del quale si parla, fosse nella sua pienezza indubitato difatto, porterebbe a far nascere il dubbio (e fu questa per avventura la mira de' suoi detrattori) ch' ei si giovasse dei MSS. Torricelliani affidatigli, nè mai s' inducesse perciò a renderli di ragion pubblica colla stampa. Ma d' altra parte quei MSS., che il Gran Duca Leopoldo si compiacque concedermi di consultare agiatamente da cima a fondo in tempo d' ozio domestico, e dei quali e di tutte le lor particolarità ho dato più speciale e minuto ragguaglio nelle precitate ANNOTAZIONI, cui richiama il mio *Supplemento alla Dottrina Torricelliana sopra le Coclee*, hanno pochissime cose riguardanti ai Centri di gravità, e diversissime tutte dalle esposte di sopra (*Racconto* c.° ai N.i IX. X. XXIX. XLVII, XLIX. L. LIV.); Viviani cita Torricelli ove occor-

re ( pag.ª 14. ec. del Libro II. ); nei *Centrobarici* di Viviani manca il *Centro* del Segmento solido della Sfera ed il suo coincidente accennato in quello d' un tal Conoide Iperbolico ( prova di che mi riuscì di supplire nell' Articolo IV. a pag. 51 - 52, Fig.ª 9. del Supplemento testè ricordato ), ed era la gioja da più apprezzarsi per adornarsene ; il fiore , il sublime della Statica metafisica , e dell' uso o sua applicazione al *Continuo* colla maggior finezza e sagacità Torricelli avealo già divulgato nell' Operetta *De dimensione Parabolae;* e finalmente intorno ai *Massimi* e *Minimi* tutt' altro ha Viviani di quel che leggesi nello Scritto inedito ( N.ⁱ XXV. XXVI. XXVII. dell' istesso *Racconto* ) sino al MDCCLXXVIII. sull' istesso argomento considerato da Torricelli.

Concludo , all' effetto di togliere ogni suspizione di plagio, o scoperto o larvato, che dalle bozze in picciole Schede del Carteggio autografo del Viviani al Cancellier Serenai si appalesano due osservabili circostanze. La prima si è che quando nel MDCLXX. , o in quel torno, ei preparavasi a dispor tutto per dar l' ultima mano non tanto alla riordinazione de' suoi quanto degli altrui MSS. perchè fossero in grado d' andar sotto il torchio corretti e limati , fu trattenuto dal debito d' esser presente per pubblico incarico a dirigere la riedificazione del Ponte, detto *di Riboccatura*, sull' Ombron di Pistoja , e dell' altro minore per trapassare il contiguo Torrente Arzana , centinato a Cicloide in onoranza del Lincèo suo Maestro, e ad allontanare oltracciò l' Ombrone istesso dal piede della Collina , ch' e' corrodeva , su cui maestosa risiede la Regia Villa del Poggio-a-Cajano , coll' aprire al Fiume nelle opposte Prata un nuov' Alveo , e fabbricarvi un Ponte murato a squadra della corrente dell' acqua, ed in dirittura dello Stradone arborato , che fa capo a quelle ampie Cascine ; progetto da me ripetuto dopo la rovina accaduta di un' innalzatovi moderno Ponte di legno . Consiste la circostanza seconda nel ricavarsi dalla lettura delle Cartuccie medesime che Viviani avesse in animo di pub-

blicare insieme le sue colle Opere postume del Torricelli, e massimamente quella *De terebratione Solidorum*, la quale s' aggira sulla misura in ispecie dei Corpi rotondi *annulari* ( come in seguito e in altra favorevole congiuntura forse potrò darne cenno ), di cui egli largì solamente e fece pubblico nel MDCXCII. l' *Aenigma Geometricum* relativo alla nuova Cupola, con quattr' Occhj d' un favoloso Tempio alla GEOMETRIA consecrato, che mosse cotanto rumore, ed altrettanto credito accrebbe a Viviani presso i Matematici di tutta Europa, non esclusi i Francesi ( Montucla l. c. a p.ª 94. del Tomo II. Fig.ª 31. Tav.ª III. ), parchi sempre in laudare, e spezialmente Scrittori d' Italia, ancor quando ell' era *Terra de' vivi*, e non quale si degnano adesso di proverbiarla *Terra de' morti*.

Fig 3.

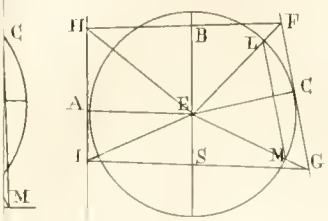



Fig 4

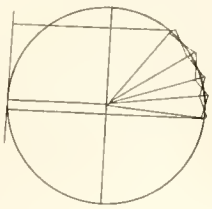


Fig. 5.

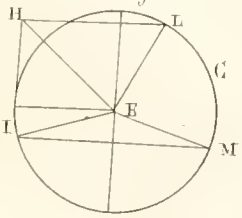



Fig 7.

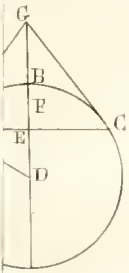



Fig. 8.

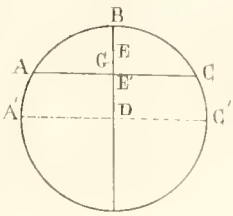



Fig. 9.

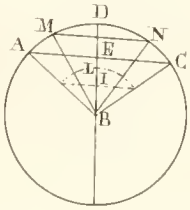



Fig. 10

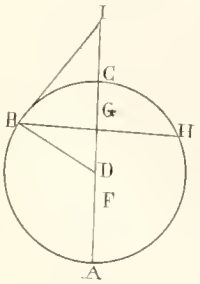



Fig. 12.

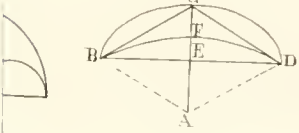



Fig. 13

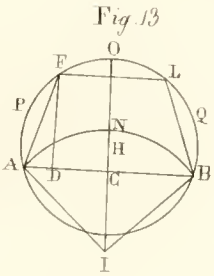



Fig. 14.

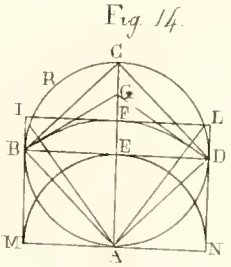



Fig 15

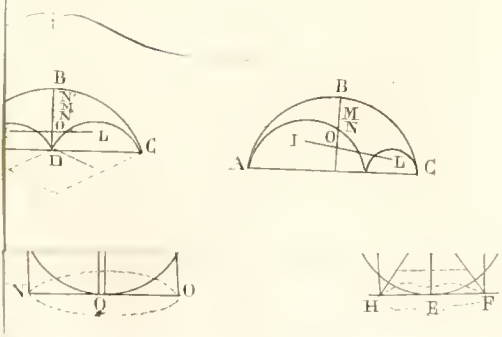



Fig 16.

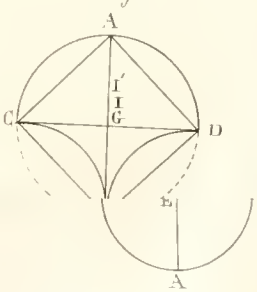



Fig 22

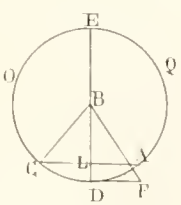



Fig 23.

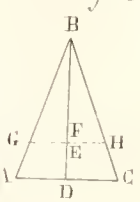


Fig 1

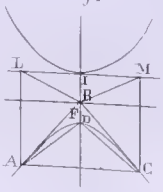



Fig. 2.

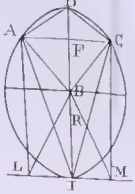



Fig 3

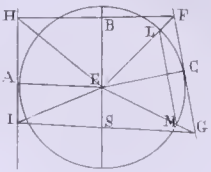



Fig 4

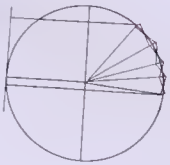


Fig 5

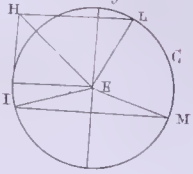



Fig 6

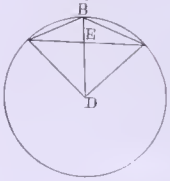



Fig 7

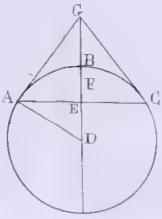



Fig 8

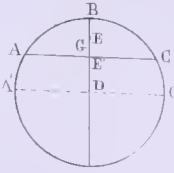



Fig. 9

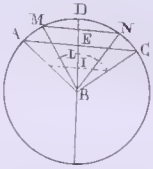



Fig. 10

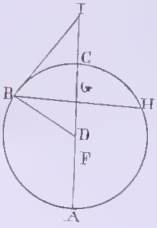



Fig 11

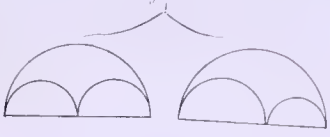


Fig 12

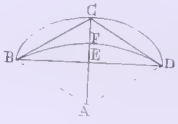



Fig 13

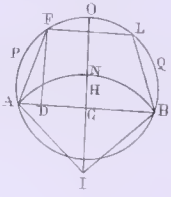



Fig 14

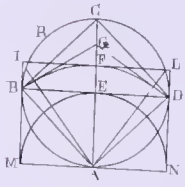



Fig 15

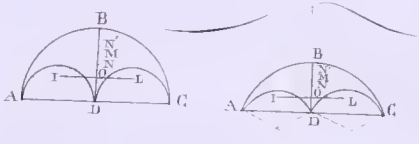



Fig 16.

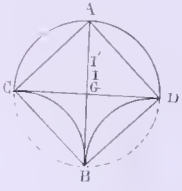



Fig 17.

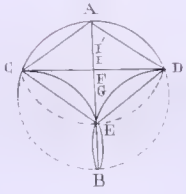



Fig 18

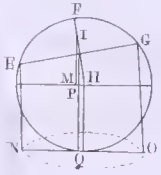



Fig 19

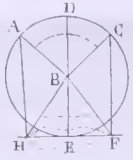



Fig 20

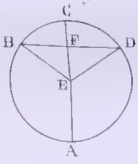



Fig. 21

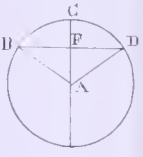



Fig 22

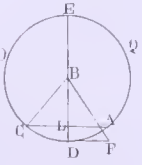



Fig 23.



# SOPRA LA INTEGRAZIONE DELLA FORMULA

$$\frac{dx}{(1+2qx\cos.\phi+q^2x^2)^{n-1}}$$

TRA I LIMITI $x=0, x=\frac{1}{0}$, E TRA I LIMITI $x=0$, $x=1$.

# MEMORIA

DI GIULIANO FRULLANI

P. PROF. DELLE MATEMATICHE SUPERIORI NELL'UNIVERSITÀ DI PISA

*Ricevuta il giorno* 4. *Febbrajo* 1818.

PRESENTATA

DAL SOCIO SIG. PIETRO PAOLI

*ED APPROVATA*

DAL SIGNOR PRESIDENTE RUFFINI

Tra le numerose ricerche da Euler intraprese sopra gli integrali definiti, non mi è avvenuto di trovar completamente trattata la formula

$$\int\frac{dx}{(1+2qx\cos.\phi+q^2x^2)^{n-1}}$$

integrando tra i limiti $x=0, x=\frac{1}{0}$. Nel caso di $n$ numero intero questa formula può integrarsi anche indefinitamente con un processo di calcolo che la riduce a dipendere dall' integrale

$$\int\frac{dx}{(1+2qx\cos.\phi+q^2x^2)^{n-2}}$$

il quale pure dipenderà da una simil formula dell' ordine $n-3$, e così gradatamente discendendo giungeremo alla formula la più semplice di questa specie

$$\int \frac{dx}{1+2qx\cos.\phi+q^2x^2}$$

la quale può completamente integrarsi. Ma quelle riduzioni che Giovanni Bernoulli, ed Euler posero in uso, non renderanno in generale più semplice la formula proposta se $n$ è frazionario, o comunque. Con tutto ciò da quelle riduzioni si può trarre un partito, ed è di formare con il lor mezzo una equazione differenziale da cui la proposta formula dipenda, e questa Equazione ridotta molto semplice per l' evanescenza di alcuni termini ai limiti $x=0$, $x=\frac{1}{0}$, rappresenterà la formula stessa presa tra quei limiti. Per tanto la integrazione darà il valore cercato, o espresso in un numero finito di termini conosciuti, come quando sarà $n$ intero, o lo farà dipendere da una trascendente irreducibile, o *primitiva* come per esempio quando $n$ sarà frazionario. Ed in questo caso ancora l' indole della proposta funzione sarà determinata. In questa breve Memoria mi propongo di dare un' analisi completa di questa funzione, di cui anche esporrò qualche uso nella dottrina delle serie per alcuni casi particolari dell' esponente $n$.

1.

Sia data pertanto la funzione

$$y=\int \frac{dx}{(1+2qx\cos.\phi+q^2x^2)^{n-1}}$$

che debba integrarsi tra i limiti $x=0$, $x=\frac{1}{0}$. Differenziando rapporto a $\phi$, avremo

$$\frac{1}{2(n-1)q\,\text{sen}.\phi}\,\frac{dy}{d\phi}=\int \frac{xdx}{(1+2qx\cos.\phi+q^2x^2)^n}.$$

Dalle riduzioni che fanno dipendere l' ordine $n$ dall' ordine $n-1$ nella formula

$$\int \frac{x\,dx}{(1+2qx\cos.\phi+q^2x^2)^n}$$

abbiamo (*) come è facile il verificare.

$$\int \frac{x\,dx}{(1+2qx\cos.\phi+q^2x^2)^n} = -\frac{(1+xq\cos.\phi)}{2(n-1)q^2\overline{\text{sen.}}^2\phi(1+2qx\cos.\phi+q^2x^2)^{n-1}}$$

(M)
$$-\frac{(2n-3)\cos.\phi}{2(n-1)q\overline{\text{sen.}}^2\phi}\int \frac{dx}{(1+2qx\cos.\phi+q^2x^2)^{n-1}}.$$

Il termine libero dal segno d' integrazione può mettersi sotto la forma

$$\frac{-(q\cos.\phi+\frac{1}{x})}{2(n-1)q^2\overline{\text{sen}}^2\phi\left[x^{\overline{1-n}}+2q\cos.\phi x^{\overline{n-1}}+q^2x^{\frac{2n-3}{n-1}}\right]^{n-1}}.$$

È manifesto ora che acciò questo termine non divenga infinito quando $x=\frac{1}{0}$, conviene che sia $n>2$ (**); ed ammessa questa supposizione, esso svanirà al limite $x=\frac{1}{0}$. Al limite poi $x=0$, diverrà

$$-\frac{1}{2(n-1)q^2\overline{\text{sen.}}^2\phi}.$$

Prendendo dunque nella Equazione (M) tutti i termini tra i limiti $x=0$, $x=\frac{1}{0}$, otterremo

$$\int \frac{x\,dx}{(1+2qx\cos.\phi+q^2x^2)^n} = \frac{1}{2(n-1)q^2\overline{\text{sen}}^2\phi} - \frac{(2n-3)\cos.\phi}{2(n-1)q.\overline{\text{sen.}}^2\phi}\int \frac{dx}{(1+2qx\cos.\phi+q^2x^2)^{n-1}}$$

Ma abbiamo supposto tra quei limiti stessi

$$y=\int \frac{dx}{(1+2qx\cos.\phi+q^2x^2)^{n-1}}$$

e ne abbiamo dedotto

---

(*) Euler Instit. Calc. Integ. T. 1. §. 39.

(**) È chiaro che il nostro termine non diverrebbe infinito ancor che fosse $n>\frac{3}{2}$ solamente. Con tutto ciò ho preso $n>2$ perchè, come vedremo, la determinazione dell'arbitraria esige questa condizione, acciò la proposta formula non divenga $=\infty$ tra i prescritti limiti

$$\frac{1}{2(n-1)q\,\mathrm{sen}.\phi}\,\frac{dy}{d\phi} = \int \frac{x\,dr}{(1+2qx\cos.\phi+q^2x^2)^n}\,.$$

Quindi sostituendo, otterremo anche

$$\frac{1}{2(n-1)q\,\mathrm{sen}.\phi}\,\frac{dy}{d\phi} = \frac{1}{2(n-1)q^2\overline{\mathrm{sen}.^2\phi}} - \frac{(2n-3)\cos.\phi}{2(n-1)q.\overline{\mathrm{sen}.^2\phi}}\,y$$

cio è, moltiplicando per $2(n-1)\,q\,\mathrm{sen}.\phi$

$$\frac{dy}{d\phi} = \frac{1}{q\,\mathrm{sen}.\phi} - (2n-3)\,\frac{\cos.\phi}{\mathrm{sen}.\phi}\,y\,.$$

Equazione lineare del primo ordine.

Integrandola, avremo

$$y = \frac{1}{\overline{\mathrm{sen}.\phi^{2n-3}}}\left(C + \frac{1}{q}\int d\phi.\overline{\mathrm{sen}.\phi}^{-2n-4}\right).$$

E quindi ancora

$$y\overline{\mathrm{sen}.\phi}^{-2n-3} = C + \frac{1}{q}\int d\phi\,\overline{\mathrm{sen}.\phi}^{-2n-4}\,.$$

Se in questa Equazione faremo $\phi = 0$, si troverà che l'arbitraria C deve esser nulla; infatti la formula $\int d\phi\,\overline{\mathrm{sen}.\phi}^{-2n-4}$ svanisce se $\phi=0$; come è facile il convincersene, rammentandosi che $n>2$ (*), e che si ha

$$\mathrm{sen}.\phi = \phi - \frac{\phi^3}{2.3} + \frac{\phi^5}{2.3.4.5} - \text{ec.}$$

D'altronde, quando $\phi = 0$, si ha

$$y = \int \frac{dx}{(1+2qx\cos.\phi+q^2x^2)^{n-1}} = \int \frac{dx}{(1+qx)^{2n-2}}$$

che tra i limiti prescritti è $= \frac{1}{q(2n-3)}$. Sostituendo questi valori nella nostra equazione ne dedurremo $C=0$. Sarà dunque finalmente

$$y = \int \frac{dx}{(1+2qx\cos.\phi+q^2x^2)^{n-1}} = \frac{1}{q\,\mathrm{sen}.\phi}\,\overline{\mathrm{sen}.\phi}^{-2n-3}\int d\phi\,\overline{\mathrm{sen}.\phi}^{-2n-4}$$

---

(*) Ecco perchè ho precedentemente supposta $n>2$. Se fosse $<2$ sarebbe $\int d\phi.\,\overline{\mathrm{sen}.\phi}^{-2n-4} = \infty$: Sarebbe quindi ancora infinita la costante C, e la formula proposta avrebbe essa pure un valore infinito.

Onde apparisce che la formula proposta dipende dall' integrale indefinito $\int d\varphi . \overline{\text{sen.}\varphi}^{2n-4}$.

2.

Si può esprimere quest' integrale con una serie ordinata per i seni multipli di $\varphi$, e far dipendere in conseguenza da questa il valore della proposta formula.

Riduciamo a tale oggetto in una serie ordinata per i coseni dei multipli di $\varphi$ la funzione $\overline{\text{sen.}\varphi}^{m}$, essendo $m$ un esponente qualunque. Facciamo perciò

$$\overline{\text{sen.}\varphi}^{m} = A + A_1 \cos.\varphi + A_2 \cos.2\varphi + A_3 \cos.3\varphi + \text{ec.} \ldots + A_a \cos.a\varphi + \text{ec.}$$

Sappiamo che il primo termine A sarà determinato dalla Equazione

$$A = \frac{1}{\pi} \int \overline{\text{sen.}\varphi}^{m} d\varphi$$

ed il termine qualunque $A_a$ dalla Equazione

$$A_a = \frac{2}{\pi} \int \overline{\text{sen.}\varphi}^{m} . \cos.a\varphi . d\varphi$$

purchè in ambi i casi si estendano gli integrali tra i limiti $\varphi = 0$, $\varphi = \pi$. Tutto dunque consisterà nel determinare tra questi limiti stessi l'integrale $\int \overline{\text{sen.}\varphi}^{m} . \cos.a\varphi . d\varphi$.

3.

Onde pervenire al nostro intento, prendiamo a considerare la formola

$$\int \overline{\text{sen.}\varphi}^{m} . \text{sen.}a\varphi . d\varphi$$

prendendo l'integrale tra i limiti stessi $\varphi = 0$, $\varphi = \pi$.
Si avrà, integrando per parti

$$\int \overline{\text{sen.}\phi}^{m}.\text{sen.}a\phi.d\phi = -\tfrac{1}{a}\cos.a\phi.\overline{\text{sen.}\phi}^{m} + \tfrac{m}{a}\int \overline{\text{sen.}\phi}^{m-1}\cos.\phi.\cos.a\phi.d\phi.$$

Supponendo $m$ positivo, avremo anche tra i dati limiti, per l' evanescenza della quantità $\overline{\text{sen.}\phi}^{m}$ ai due limiti $\phi = 0$, $\phi = \pi$.

$$\int \overline{\text{sen.}\phi}^{m}.\text{sen.}a\phi.d\phi = \tfrac{m}{a}\int \overline{\text{sen.}\phi}^{m-1}.\cos.\phi.\cos.a\phi.d\phi\ .$$

Si aggiunga adesso da ambe le parti la stessa quantità $\frac{m}{a}\int \overline{\text{sen.}\phi}^{m}.\text{sen.}a\phi.d\phi$; quindi invece di aggiungerla si sottragga; otterremo così i due resultati

$$\tfrac{a+m}{a}\int \overline{\text{sen.}\phi}^{m}\text{sen.}a\phi.d\phi = \tfrac{m}{a}\int \overline{\text{sen.}\phi}^{m-1}d\phi\Big\{\cos.a\phi.\cos.\phi + \text{sen.}a\phi.\text{sen.}\phi\Big\},$$

$$\tfrac{a-m}{a}\int \overline{\text{sen.}\phi}^{m}.\text{sen.}a\phi\,d\phi = \tfrac{m}{a}\int \overline{\text{sen.}\phi}^{m-1}d\phi\Big\{\cos.a\phi.\cos.\phi - \text{sen.}a\phi.\text{sen.}\phi\Big\}.$$

Queste Equazioni equivalgono manifestamente alle seguenti:

$$\tfrac{a+m}{a}\int \overline{\text{sen.}\phi}^{m}.\text{sen.}a\phi.d\phi = \tfrac{m}{a}\int \overline{\text{sen.}\phi}^{m-1}d\phi.\cos.(a-1)\phi,$$

$$\tfrac{a-m}{a}\int \overline{\text{sen.}\phi}^{m}\text{sen.}a\phi.d\phi = \tfrac{m}{a}\int \overline{\text{sen.}\phi}^{m-1}d\phi.\cos.(a+1)\phi\ .$$

E tra queste eliminando $\int \overline{\text{sen.}\phi}^{m}.\text{sen.}a\phi.d\phi$, avremo

$$\tfrac{1}{a-m}\int \overline{\text{sen.}\phi}^{m-1}d\phi\cos.(a+1)\phi = \tfrac{1}{a+m}\int \overline{\text{sen.}\phi}^{m-1}d\phi\cos.(a-1)\phi.$$

Ciò è cambiando $m$ in $m+1$, ed $a$ in $a+1$

$$\int \overline{\text{sen.}\phi}^{m}d\phi.\cos.(a+2)\phi = \tfrac{a-m}{a+m+2}\int \overline{\text{sen.}\phi}^{m}d\phi.\cos.a\phi.$$

Da questa Equazione pertanto dipenderà il valore dell' integrale $\int \overline{\text{sen.}\phi}^{m}d\phi.\cos.a\phi$ tra i limiti $\phi = 0$, $\phi = \pi$.

Facciamo per semplicità

$$\int \overline{\text{sen.}\phi}^{m}.d\phi.\cos.a\phi = y_a.$$

Ed avremo per determinarlo la Equazione

$$y_{a+2} = \frac{a-m}{a+m+2} y_a .$$

Con le sostituzioni successive avremo facilmente da questa, se $a$ è pari

$$y_a = - \frac{m(2-m)(4-m) \ldots (a-m-2)}{(m+2)(m+4) \ldots (m+a)} y_0 ,$$

e se $a$ è dispari

$$y_a = \frac{(1-m)(3-m)(5-m) \ldots (a-m-2)}{(m+3)(m+5) \ldots (m+a)} y_1$$

Ma essendo ora $y_a = \int \overset{--m}{\text{sen}}.\varphi . \cos.a\varphi . d\varphi$, sarà $y_0 = \int \overset{--m}{\text{sen}}.\varphi \, d\varphi$, $y_1 = \int \overset{--m}{\text{sen}}.\varphi . \cos.\varphi . d\varphi$, sempre integrando tra i limiti $\varphi = 0$, $\varphi = \pi$ ; quindi avremo

$$y_1 = \frac{1}{m+1} \overset{--m+1}{\text{sen}}.\varphi$$

che si annulla tra quei limiti. Delle due formule ottenute per $y_a$ quella sola dunque sussiste ove $a$ è pari; sarà dunque in questa supposizione, ponendo per $y_a$, ed $y_0$ i loro valori,

$$\int \overset{--m}{\text{sen}}.\varphi . \cos.a\varphi . d\varphi = - \frac{m(2-m)(4-m) \ldots (a-m-2)}{(m+2)(m+4) \ldots (m+a)} \int \overset{--m}{\text{sen}}.\varphi \, d\varphi$$

integrando sempre tra i limiti $\varphi = 0$, $\varphi = \pi$.

## 4.

Abbiamo veduto nell' articolo 2. che per ridurre in serie la funzione $\overset{--m}{\text{sen}}.\varphi$ per i coseni dei multipli di $\varphi$ in modo che abbiasi

$$\overset{--m}{\text{sen}}.\varphi = A + A_1 \cos.\varphi + A_2 \cos.2\varphi + A_3 \cos.3\varphi + \text{ec.} \ldots + A_a \cos.a\varphi + \text{ec.}$$

il primo termine $A_1$ ed il coefficiente generale $A_a$ saranno determinati dalle Equazioni

$$A = \frac{1}{\pi} \int \overline{\overline{\text{sen.}\varphi}}^{m} \, d\varphi$$

$$A_a = \frac{2}{\pi} \int \overline{\overline{\text{sen.}\varphi}}^{m} \, . \cos.a\varphi . d\varphi$$

integrando tra i soliti limiti. Sostituendo dunque il valore ottenuto nel precedente articolo per $\int \overline{\overline{\text{sen.}\varphi}}^{m} \cos.a\varphi . d\varphi$, avremo con la condizione che $a$ sia sempre pari

$$A = \frac{1}{\pi} \int \overline{\overline{\text{sen.}\varphi}}^{m} \, d\varphi$$

$$A_a = - \frac{2m(2-m)(4-m) \ldots . (a-m-2)}{(m+2)(m+4) \ldots . (m+a)} \int \frac{\overline{\overline{\text{sen.}\varphi}}^{m} \, d\varphi}{\pi} .$$

Facendo ora la sostituzione di questi valori nella serie assegnata per $\overline{\overline{\text{sen.}\varphi}}^{m}$, otterremo immediatamente

$$\overline{\overline{\text{sen.}\varphi}}^{m} = \left[ 1 - \frac{2m}{m+2} \cos.2\varphi - \frac{2m(2-m)}{(m+2)(m+4)} \cos.4\varphi - \right.$$
$$\left. \frac{2m(2-m)(4-m)}{(m+2)(m+4)(m+6)} \cos.6\varphi - \text{ec.} \right] \int \frac{\overline{\overline{\text{sen.}\varphi}}^{m} \, d\varphi}{\pi}$$

allorchè $m$ è un numero intero positivo, è sempre assegnabile il valore di $\int \overline{\overline{\text{sen.}\varphi}}^{m} \, d\varphi$ tra i limiti $\varphi = 0$, $\varphi = \pi$; ed apparisce inoltre dalla serie ottenuta che $\overline{\overline{\text{sen.}\varphi}}^{m}$ si esprimerà per un numero finito di termini se $m$ è numero pari, ma che anderà sempre all' infinito se è dispari.

Sia per esempio $m = 1$. Sarà

$$\int \text{sen.}\varphi \, . \, d\varphi = - \cos. \varphi \, .$$

Ciò è tra i limiti prescritti

$$\int \text{sen.}\varphi . \, d\varphi = 2$$

Sostituendo questi valori nella serie quì sopra riportata

$$\overline{\overline{\text{sen.}\varphi}}^{m} = \left[ 1 - \frac{2m}{m+2} \cos.2\varphi - \frac{2m(2-m)}{(m+2)(m+4)} \cos.4\varphi - \right.$$
$$\left. \frac{2m(2-m)(4-m)}{(m+2)(m+4)(m+6)} \cos.6\varphi - \text{ec.} \right] \int \frac{\overline{\overline{\text{sen.}\varphi}}^{m} \, d\varphi}{\pi}$$

si avrà

$$\text{sen.}\vec{\varphi} = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\left[\frac{\cos.2\vec{\varphi}}{2^2-1} + \frac{\cos.4\vec{\varphi}}{4^2-1} + \frac{\cos.6\vec{\varphi}}{6^2-1} + \frac{\cos.8\vec{\varphi}}{8^2-1} + \text{ec.}\right].$$

Come altrove ho dimostrato.

E se vorremo poi il valore di $\int \overline{\text{sen.}\vec{\varphi}}^{-m} d\vec{\varphi}$ preso in modo che svanisca quando $\vec{\varphi} = 0$, lo avremo integrando la ottenuta espressione di $\overline{\text{sen.}\vec{\varphi}}^{-m}$, e si avrà

$$\int \overline{\text{sen.}\vec{\varphi}}^{-m} d\vec{\varphi} = \left[\vec{\varphi} - \frac{m}{m+2}\text{sen.}2\vec{\varphi} - \frac{m(2-m)}{2(m+2)(m+4)}\text{sen.}4\vec{\varphi} - \frac{m^2-m(4-m)}{3(m+2)(m+4)(m+6)}\text{sen.}6\vec{\varphi} - \text{ec.}\right]\int \frac{\overline{\text{sen}\,\vec{\varphi}}^{-m} d\vec{\varphi}}{\pi}$$

5.

Nell'articolo 1. abbiamo trovato tra i limiti $x=0$, $x=\frac{1}{0}$

$$\int \frac{dx}{(1+2qx\cos\vec{\varphi}+q^2x^2)^{n-1}} = \frac{1}{q\,\overline{\text{sen.}\vec{\varphi}}^{2n-3}} \int \overline{\text{sen.}\vec{\varphi}}^{-2n-4} d\vec{\varphi}$$

facciamovi per semplicità maggiore

$$2n - 4 = m;$$

e quella Equazione si trasformerà nella seguente

$$\int \frac{dx}{(1+2qx\cos.\vec{\varphi}+q^2x^2)^{\frac{m+2}{2}}} = \frac{1}{q\,\overline{\text{sen.}\vec{\varphi}}^{m+1}} \int \overline{\text{sen.}\vec{\varphi}}^{-m} d\vec{\varphi}.$$

Ed in questa potremo in luogo di $\int \overline{\text{sen.}\vec{\varphi}}^{-m} d\vec{\varphi}$ sostituire il valore in serie che gli abbiamo assegnato.

6.

Abbiamo così completamente sviluppata la funzione

$$\int \frac{dx}{(1+2qx\cos.\vec{\varphi}+q^2x^2)^{n-1}}$$

estesa da $x=0$ sino ad $x=\frac{1}{0}$. Con facilità si può anche tro-

varne il valore quando i limiti saranno $x=0$, $x=1$. Per convincersene riprendiamo la riduzione riportata nell'articolo 1.

$$\int \frac{x\,dx}{(1+2qx\cos.\phi+q^2x^2)^n} = -\frac{(1+xq\cos.\phi)}{2(n-1)q^2\overline{\text{sen.}}^2\phi(1+2qx\cos.\phi+q^2x^2)^{n-1}}$$
$$-\frac{(2n-3)\cos.\phi}{2(n-1)q\,\text{sen.}^2\phi}\int\frac{dx}{(1+2qx\cos.\phi+q^2x^2)^{n-1}}.$$

Prendendo ora tutti i termini tra i limiti $x=0$, $x=1$, avremo facilmente la nuova Equazione

$$\int \frac{x\,dx}{(1+2qx\cos.\phi+q^2x^2)^n} = \frac{1}{2(n-1)q^2\overline{\text{sen.}}^2\phi} - \frac{(1+q\cos.\phi)}{2(n-1)q^2\overline{\text{sen.}}^2\phi(1+2q\cos.\phi+q^2)^{n-1}}$$
$$\frac{-(2n-3)\cos.\phi}{2(n-1)q\overline{\text{sen.}}^2\phi}\int\frac{dx}{(1+2qx\cos.\phi+q^2x^2)^{n-1}}.$$

Suppongasi ora

$$y=\int\frac{dx}{(1+2qx\cos.\phi+q^2x^2)^{n-1}}.$$

Quindi dedurremo

$$\frac{1}{2(n-1)q\text{sen.}\phi}\frac{dy}{d\phi}=\int\frac{x\,dx}{(1+2qx\cos.\phi+q^2x^2)^n}.$$

Sostituendo ora questi valori nell'Equazione ottenuta, si avrà moltiplicando tutto per $2(n-1)q\text{sen.}\phi$

$$\frac{dy}{d\phi}=\frac{1}{q\text{sen.}\phi}\frac{(1+q\cos.\phi)}{q\text{sen.}\phi(1+2q\cos.\phi+q^2)^{n-1}}-(2n-3)\frac{\cos.\phi}{\text{sen.}\phi}.y.$$

Equazione lineare del primo ordine.

Integrandola, si avrà

$$y=\frac{1}{\text{sen.}\phi^{2n-3}}\left[C+\frac{1}{q}\int\left[\text{sen.}\phi^{2n-4}-\frac{(1+q\cos.\phi).\text{sen.}\phi^{2n-4}}{(1+2q\cos.\phi+q^2)^{n-1}}\right]d\phi\right].$$

Questo sarà dunque il valore della funzione $\int\frac{dx}{(1+2qx\cos.\phi+q^2x^2)^{n-1}}$ presa tra i limiti $x=0$, $x=1$. Determineremo facilmente la indeterminata C osservando che supposto $n>2$, nel caso di $\phi=0$ svanisce la quantità

$$\int\left[\overline{\text{sen.}}^{2n-4}\phi-\frac{(1+q\cos.\phi)\,\text{sen.}^2\phi^{2n-4}}{(1+2q\cos.\phi+q^2)^{n-1}}\right]d\phi$$

onde nella Equazione ottenuta moltiplicando tutto per

$\overset{-2n-3}{\text{sen.}\varphi}$, ed osservando che nel caso di $\varphi = 0$ si ha tra i dati limiti

$$y = \int \frac{dx}{(1+2qx\cos.\varphi+q^2x^2)^{n-1}} = \int \frac{dx}{(1+qx)^{2n-2}} = \frac{1}{q(2n-3)}\left[1 - \frac{1}{(1+q)^{2n-3}}\right]$$

troveremo, sostituendo, $C = 0$. Sarà dunque finalmente

$$\int \frac{dx}{(1+2qx\cos.\varphi+q^2x^2)^{n-1}} = \frac{1}{q\overset{-2n-3}{\text{sen.}\varphi}} \int \left[\overset{-2n-4}{\text{sen.}\varphi} - \frac{(1+q\cos.\varphi)\overset{-2n-4}{\text{sen.}\varphi}}{(1+2q\cos.\varphi+q^2)^{n-1}}\right] d\varphi.$$

7.

Se in questa Equazione faremo $q = 1$, si avrà più semplicemente

$$\int \frac{dx}{(1+2x\cos.\varphi+x^2)^{n-1}} = \frac{1}{\overset{-2n-3}{\text{sen.}\varphi}} \int \left[\overset{-2n-4}{\text{sen.}\varphi} - \frac{(1+\cos.\varphi)\overset{-2n-4}{\text{sen.}\varphi}}{2^{n-1}(1+\cos.\varphi)^{n-1}}\right] d\varphi.$$

Abbiamo ora

$$\overset{-2n-4}{\text{sen.}\varphi} = (1-\cos.\varphi)^{n-2} \cdot (1+\cos.\varphi)^{n-2}.$$

L'equazione ottenuta si ridurrà così facilmente alla forma

$$\int \frac{dx}{(1+2x\cos.\varphi+x^2)^{n-1}} = \frac{1}{\overset{-2n-3}{\text{sen.}\varphi}} \int \left[\overset{-2n-4}{\text{sen.}\varphi} - \frac{1}{2^{n-1}}(1-\cos.\varphi)^{n-2}\right] d\varphi.$$

Se faremo inoltre $n=2$, agevolmente troveremo

$$\frac{\varphi}{\text{sen.}\varphi} = 2\int \frac{dx}{1+2x\cos.\varphi+x^2}.$$

A questa stessa relazione sono giunto anche nell'articolo 17. delle *ricerche sulle serie*, seguendo un'analisi diversissima dalla precedente. Trattandosi di una semplicissima formula razionale, con somma facilità si può verificare quella relazione; ed infatti chi avesse la più elementare idea del Calcolo Integrale troverebbe, operando convenientemente

$$\int \frac{dx}{1+2x\cos.\varphi+x^2} = \frac{1}{2\sqrt{-1}.\text{sen.}\varphi}\left[\int \frac{dx}{x+e^{-\varphi\sqrt{-1}}} - \int \frac{dx}{x+e^{\varphi\sqrt{-1}}}\right].$$

Ed effettuata la integrazione prescritta tra i limiti $x=0$, $x=1$, convincerebbesi subito della identità delle due espressioni $\frac{\phi}{\text{sen.}\phi}$, $2\int\frac{dx}{1+2x\cos.\phi+x^2}$. Un' analoga verificazione deve sempre aver luogo, quando una funzione qualunque è rappresentata per mezzo di un integrale definito; per modo che eseguendo la integrazione nel modo ordinario deve sempre giungersi ad un resultato identico. Con tutto ciò queste riduzioni sono molto apprezzate dai Geometri, perchè una funzione data per mezzo di un integrale definito, o anche indefinito, può subire tutte le trasformazioni di cui quell' integrale è suscettibile; anzi l' applicazione del calcolo integrale alla somma, o alla trasformazione delle serie si appoggia sopra questo solo principio, che tutti i geometri hanno posto in uso.

8.

Dietro le riflessioni precedenti, la formula

$$\frac{\phi}{\text{sen.}\phi}=2\int\frac{dx}{1+2x\cos.\phi+x^2}$$

può servire ad assegnare il rapporto tra l' arco $\phi$, ed il suo seno, esprimendolo in tante forme diverse in quante può rappresentarsi l' integrale

$$2\int\frac{dx}{1+2x\cos.\phi+x^2}$$

preso tra i limiti $x=0$, $x=1$.

Riprendendo per esempio la espressione

$$\int\frac{dx}{1+2x\cos.\phi+x^2}=\frac{1}{2\sqrt{-1}.\text{sen.}\phi}\left[\int\frac{dx}{x+e^{-\phi\sqrt{-1}}}-\int\frac{dx}{x+e^{\phi\sqrt{-1}}}\right]$$

e sostituendo in luogo di $\frac{1}{x+e^{-\phi\sqrt{-1}}}$, $\frac{1}{x+e^{\phi\sqrt{-1}}}$ le serie geometriche che rappresentano queste frazioni, si avrà immediatamente, ( osservando che $\frac{1}{e^{-n\phi\sqrt{-1}}}-\frac{1}{e^{n\phi\sqrt{-1}}}=2\sqrt{-1}.\text{sen.}\,n\phi$ )

$$\int \frac{dx}{1+2x\cos.\phi+x^2} = \frac{1}{\text{sen}.\phi}\int\Big[\text{sen}.\phi - x\,\text{sen}.2\phi + x^2\,\text{sen}.3\phi - x^3\,\text{sen}.4\phi + \text{ec.}\Big]\,dx\,.$$

Ed integrando tra i limiti convenuti

$$\int \frac{dx}{1+2x\cos.\phi+x^2} = \frac{1}{\text{sen}.\phi}\left[\text{sen}.\phi - \frac{\text{sen}.2\phi}{2} + \frac{\text{sen}.3\phi}{3} - \frac{\text{sen}.4\phi}{4} + \text{ec.}\right]$$

Ma essendo tra i limiti stessi

$$\frac{\phi}{\text{sen}.\phi} = 2\int \frac{dx}{1+2x\cos.\phi+x^2}$$

si avrà ancora

$$\frac{\phi}{2} = \text{sen}.\phi - \frac{\text{sen}.2\phi}{2} + \frac{\text{sen}.3\phi}{3} - \frac{\text{sen}.4\phi}{4} + \text{ec.}$$

Per tanto la Equazione da me stabilita non è che una trasformata di questa espressione, la quale è dovuta ad Euler, e rappresenta l'arco $\phi$ sotto una forma molto significante, quantunque realmente quella serie non sia che una trasformazione analitica come lo è qualunque serie che rappresenti una funzione circolare, e come lo sono infatti tutte quelle nuove forme che altrove ho assegnate per $\cos.n\phi$, $\text{sen}.n\phi$ ec. Per certo se le identità di questo genere fossero viziose, o inutili, converrebbe pur dire che lo sarebbero tutte le trasformazioni, le quali formano la parte più interessante dell'analisi, come la sola serie di Taylor basta a convincerne.

9.

Ma per vedere anche con chiarezza maggiore che la Equazione

$$\frac{\phi}{\text{sen}.\phi} = 2\int \frac{dx}{1+2x\cos.\phi+x^2}$$

ben lungi dall'essere insignificante, può anzi condurre a qualche utile, e non ovvio resultato, riprendiamo la frazione, $\frac{1}{1+2x\cos.\phi+x^2}$, e riduciamola in serie per le potenze di $\cos.\phi$; avremo

$$\frac{1}{1+2x\cos.\phi+x^2} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{2x}{(1+x^2)^2}\cos.\phi + \frac{2^2x^2}{(1+x^2)^3}\overset{--2}{\cos.\phi}$$

$$- \frac{2^3x^3}{(1+x^2)^4}\overset{--3}{\cos.\phi} + \frac{2^4x^4}{(1+x^2)^5}\overset{--4}{\cos.\phi} - \text{ec.} \ldots \pm \frac{2^nx^n}{(1+x^2)^{n+1}}\overset{--n}{\cos.\phi} \mp \text{ec.}$$

Moltiplicando adesso per $dx$, ed integrando tra i limiti $x=0$, $x=1$, otterremo la formula $\int \frac{dx}{1+2x\cos.\phi+x^2}$ svolta come sopra, ed il coefficiente di $\overset{--n}{\cos.\phi}$ sarà dato dalla espressione

$$\pm 2^n \int \frac{x^n dx}{(1+x^2)^{n+1}}$$

integrando tra i limiti stessi, e scegliendo il segno superiore se $n$ è pari, e l'inferiore se $n$ è dispari. Per integrare la formula $\frac{x^n dx}{(1+x^2)^{n+1}}$, facciamovi $\frac{x}{1+x^2} = \frac{u}{2}$, ed avremo la trasformata $\frac{1}{2^{n+1}} \frac{u^n du}{\sqrt{1-u^2}}$, e siccome la formula proposta deve integrarsi tra i limiti $x=0$, $x=1$, parimente la trasformata $\frac{1}{2^{n+1}} \frac{u^n du}{\sqrt{1-u^2}}$ dovrà integrarsi tra i limiti $u=0$, $u=1$, poichè $\frac{u}{2} = \frac{x}{1+x^2}$. Quindi in questa particolar supposizione sarà

$$2^n \int \frac{x^n dx}{(1+x^2)^{n+1}} = \frac{1}{2} \int \frac{u^n du}{\sqrt{1-u^2}} .$$

Abbiamo adesso, come è noto, se $n$ è pari, tra i limiti $u=0$, $u=1$,

$$\frac{1}{2} \int \frac{u^n du}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{1}{2} \frac{1\,3.5\,7.9 \ldots (n-1)}{2.4.6.8 \ldots\ldots n} \pi$$

essendo $\pi$ la mezza periferia, e se $n$ è dispari

$$\frac{1}{2} \int \frac{u^n du}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{1}{2} \frac{2.4.6.8 \ldots n}{3.5.7.9 \ldots (n+1)} .$$

Questa è dunque la espressione di $2^n \int \frac{x^n dx}{(1+x^2)^{n+1}}$, integrando tra i soliti limiti. Abbiamo così ottenuto il coefficiente di

$\overline{\cos.\varphi}^{n}$ nello sviluppo di $\int \frac{dx}{1+2x\cos.\varphi+x^2}$ svolta per le potenze di $\cos.\varphi$; sostituendo dunque, ed osservando che al caso di $n$ pari conviene il segno positivo, ed il negativo ad $n$ dispari, otterremo

$$\int \frac{dx}{1+2x\cos.\varphi+x^2} = \frac{1}{2}\left[\frac{\pi}{2} - \cos.\varphi + \frac{1}{2}\frac{\pi}{2}\overline{\cos.\varphi}^{2} - \frac{2}{3}\overline{\cos.\varphi}^{3}\right.$$

$$+ \frac{1.3}{2.4}\frac{\pi}{2}\overline{\cos.\varphi}^{4} - \frac{2\,4}{3.5}\cdot\overline{\cos.\varphi}^{5} + \frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\overline{\cos.\varphi}^{6} - \frac{2.4.6}{3.5.7}\cdot\overline{\cos.\varphi}^{7}$$

$$\left. + \frac{1\,3\,5.7}{2.4.6.8}\cdot\frac{\pi}{2}\overline{\cos.\varphi}^{8} - \text{ec.}\right].$$

Ma essendo

$$\frac{\phi}{\text{sen.}\phi} = 2\int \frac{dx}{1+2x\cos.\varphi+x^2}$$

sarà anche

$$\frac{\phi}{\text{sen.}\phi} = \frac{\pi}{2} - \cos.\varphi + \frac{1}{2}\frac{\pi}{2}\cdot\overline{\cos.\varphi}^{2} - \frac{2}{3}\overline{\cos.\varphi}^{3} + \frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{\pi}{2}\overline{\cos.\varphi}^{4}$$

$$- \frac{2.4}{3.5}\overline{\cos.\varphi}^{5} + \frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{\pi}{2}\overline{\cos.\varphi}^{6} - \frac{2.4.6}{3.5.7}\overline{\cos.\varphi}^{7} + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\frac{\pi}{2}\overline{\cos.\varphi}^{8} - \text{ec.}$$

Serie assai elegante, e che può essere utilissima, perchè sempre convergente, specialmente poi se l'arco $\varphi$ poco differisce dal quadrante.

Se faremo $\varphi = 0$, sarà $\frac{\phi}{\text{sen.}\phi} = 1$, e quindi avremo

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2 + \frac{2}{3} + \frac{2.4}{3.5} + \frac{2.4.6}{3.5.7} + \text{ec.}}{1 + \frac{1}{2} + \frac{1\,3}{2.4} + \frac{1.3.5}{2.4.6} + \text{ec.}}$$

10.

Potrei aggiungere alle già fatte molte altre riflessioni sopra gli usi della Equazione

$$\frac{\phi}{\text{sen.}\phi} = 2\int \frac{dx}{1+2x\cos.\phi+x^2}.$$

Ma mi limiterò solamente a fare osservare che da essa discende la relazione assai singolare

$$\int \frac{dx}{1+2x\cos.\phi+x^2} = \frac{1}{1-n^2} - \frac{2^2}{2^2-n^2} + \frac{3^2}{3^2-n^2} - \frac{4^2}{4^2-n^2} + \text{ec.}$$

Ove $n = \frac{\phi}{\pi}$, $\pi$ denotando la mezza periferia circolare, e la integrazione essendo eseguita tra i limiti $x=0$, $x=1$. Può vedersene la dimostrazione nel numero 44. delle *Ricerche sulle Serie*.

Questa relazione può dedursi ancora da una considerazione differente da quella che nella opera citata è posta in uso. Ho infatti dimostrato nel numero 32. della precedente Memoria, che l'esponenziale $e^{a\phi}$ può svolgersi in una serie ordinata per i coseni degli archi multipli di $\phi$ come segue:

$$e^{a\phi} = \frac{e^{a\pi}-1}{a\pi} - \frac{2a}{\pi}\frac{(e^{a\pi}+1)}{1+a^2}\cos.\phi + \frac{2a}{\pi}\frac{(e^{a\pi}-1)}{2^2+a^2}\cos.2\phi - \frac{2a}{\pi}\frac{(e^{a\pi}+1)}{3^2+a^2}\cos.3\phi + \frac{2a}{\pi}\frac{(e^{a\pi}-1)}{4^2+a^2}\cos.4\phi - \text{ec.}$$

Differenziando rapporto $a\phi$ due volte, e facendo quindi $\phi=0$, si avrà, riducendo,

$$\frac{\pi a}{2} = e^{a\pi}\left[\frac{1}{1+a^2} - \frac{2}{2^2+a^2} + \frac{3^2}{3^2+a^2} - \frac{4^2}{4^2+a^2} + \text{ec.}\right] + \left(\frac{1}{1+a^2} + \frac{2^2}{2^2+a^2} + \frac{3^2}{3^2+a^2} + \frac{4^2}{4^2+a^2} + \text{ec.}\right).$$

Se in quella Equazione faremo $a=n\sqrt{-1}$, quindi $a=-n\sqrt{-1}$, e sottrarremo i resultati, troveremo

$$\frac{n\pi\sqrt{-1}}{e^{n\pi\sqrt{-1}} - e^{-n\pi\sqrt{-1}}} = \frac{1}{1-n^2} - \frac{2^2}{2^2-n^2} + \frac{3^2}{3^2-n^2} - \frac{4^2}{4^2-n^2} + \text{ec.}$$

Ciò è facendo $n\pi = \phi$

$$\frac{\phi}{\text{sen.}\phi} = 2\left[\frac{1}{1-n^2} - \frac{2^2}{2^2-n^2} + \frac{3^2}{3^2-n^2} - \frac{4^2}{4^2-n^2} + \text{ec.}\right]^{(*)}.$$

(*) Questa relazione potrebbe ottenersi ancora per induzione decomponendo nei suoi infiniti fattori la formula $\frac{\phi}{\text{sen.}\phi}$. Si vedano gli opuscoli analitici di Euler.

La quale Equazione, combinata con l'altra

$$\frac{\phi}{\text{sen.}\phi} = 2\int \frac{dx}{1+2x\cos\phi+x^2}$$

ci darà quel resultato al quale ci eravamo proposti di giungere.

*Fine del I.° Fascicolo di Matematica del T.° XIX.*

1/3 P

